Bizonyítsuk be, hogy ha $\mid x \mid < 1$ *és* $\mid y \mid < 1$, *akkor*

$$\mid x - y \mid < \mid 1 - xy \mid . \tag{1}$$

I. megoldás. A négyzetfüggvény szigorúan monoton növő a nemnegatív számok halmazán, így elég belátni, hogy

$$(|x-y|)^2 < (|1-xy|)^2. \tag{2}$$

Felhasználva, hogy tetszőleges t számra $|t|^2 = t^2$, (2)-ben a négyzetre emeléseket elvégezve; és az egyenlőtlenséget rendezve kapjuk, hogy

$$0 < (1-x^2)\,(1-y^2).$$

Itt $|x| < 1$ és $|y| < 1$ miatt a jobb oldalon álló szorzat mindkét tényezője valóban pozitív.

II. megoldás. (1)-ben x és y szerepét felcserélve ugyanazt az egyenlőtlenséget kapjuk, így feltehetjük, hogy $x \geq y$. Ekkor $|x-y| = x-y$, továbbá $xy < 1$ miatt $|1-xy| = 1-xy$. Ezek alapján a bizonyítandó állítás átrendezések után az

$$x(1+y) < 1+y$$

egyenlőtlenség. Ez nyilvánvalóan igaz, hiszen $1+y > 0$ és $x < 1$. **(R. Zs.)**