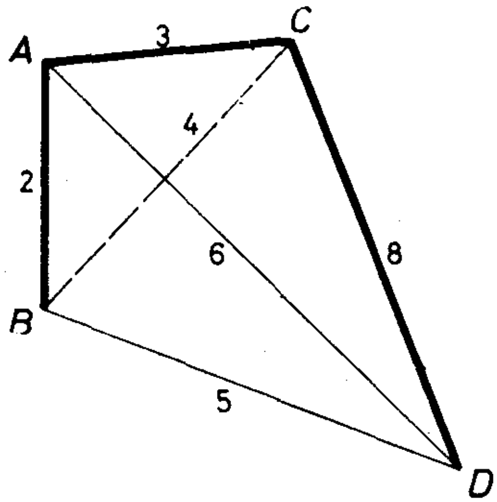
Próbáljunk meg tetraédert építeni az adott élekből. Nem szerepelhetnek ugyanabban a háromszögben a 2 cm-es és a 8 cm-es élek, hiszen a 2 cm-es élt a többi négy közül még a legnagyobb, a 6 cm-es él sem egészíti ki 8 cm-nél hosszabbra, márpedig egy háromszögben két oldal összege nagyobb a harmadiknál. Jelöljük a 2 cm-es él végpontjait A-val, B-vel, a 8 cm-eséit C-vel, D-vel, tudjuk már, hogy ezek különbözőek.



A többi 4 él mindegyikének az egyik végpontja az A, B, a másik a C, D pontok közül való. Válasszuk úgy a betűzést, hogy a 3 cm-es él két végpontja A és C legyen. Az ABC háromszög harmadik oldala, BC most már csak a 4 cm-es él lehet, hiszen a másik kettő mellett az $AB+AC=5$ cm-es összeg túl kicsi lenne. Ugyancsak kevés az 5 cm-es él az ACD háromszög harmadik oldalának, így $AD=6$, $BD=5$. Ezek mellett az ABD háromszögben $AD=6$, cm $AB+BD=7$ cm, a BCD háromszögben $CD=8$ cm, $BC+BD=9$ cm, tehát a keresett tetraéder valóban létrejön.

Tegyük fel most, hogy az adott elemekből ketten is felépítették a keresett tetraédert. Betűzzük az első tetraéder csúcsait a fenti meggondolás szerint A-val, B-vel, C-vel, D-vel, a másodikét A'-vel, B'-vel, C'-vel, D'-vel, ekkor tehát

$$AB=A'B',\ AC=A'C',\ BC=B'C',\ AD=A'D',\ BD=B'D',\ CD=C'D'. \tag{1}$$

A második $A'B'C'$ lapja egybevágó az első ABC lapjával, tehát ráhelyezhető úgy, hogy A' az A-ra, B' a B-re, C' a C-re kerüljön. Ezután a D' pont rendre ugyanolyan messze lesz az A, B, C pontoktól, mint a D. Ha D és D' azonosak, készen vagyunk, ha nem, tekintsük a DD' szakaszt. Az A, B, C pontok mindegyike egyenlő távolságra van ennek a végpontjaitól, tehát ezek a pontok benne vannak a szakasz felezőpontján átmenő, a szakaszra merőleges S síkban. Így ha az $ABCD$ tetraédert S-re tükrözzük, az átmegy az $ABCD'$ tetraéderbe. A két tetraéder tehát mindig egybevágó.

Erdős László (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., I. o. t.)

Megjegyzés. Megoldásunk második fele általános érvényű: (1) teljesülése mindig maga után vonja az $ABCD$, $A'B'C'D'$ tetraéderek egybevágóságát. Ha azonban a feladatban például 5, 6, 8 helyett 10, 5, 10, 6, 10, 8 állna, a feladat állítása már nem volna igaz, hiszen ekkor a D-ből induló élek tetszés szerint átrendezhetőek.