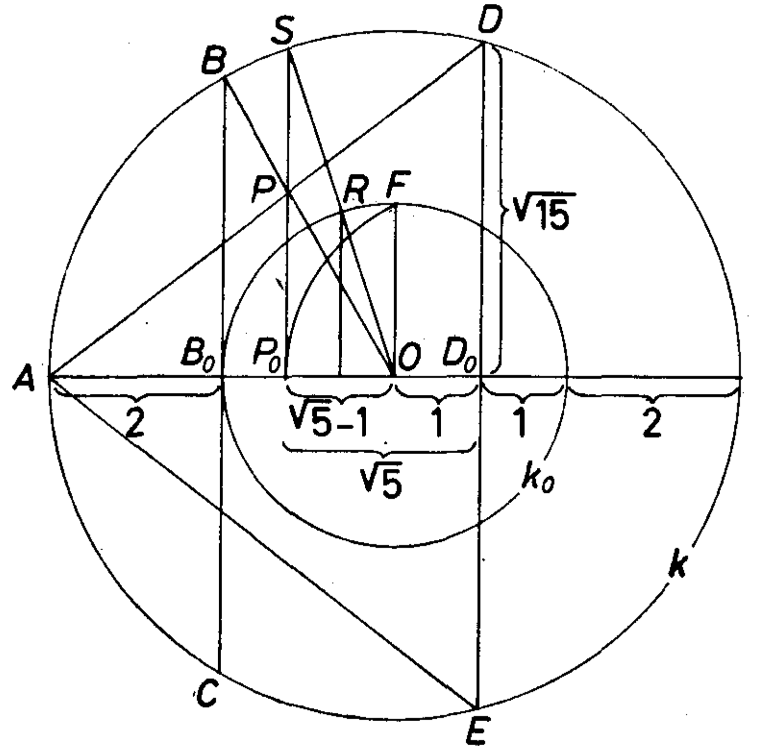
Növeljük négyszeresére a kör sugarát, hogy ne kelljen törtekkel számolnunk, és jelöljük B-nek, D-nek, P-nek az AO egyenesen levő vetületét B_0-lal, D_0-lal, P_0-lal.



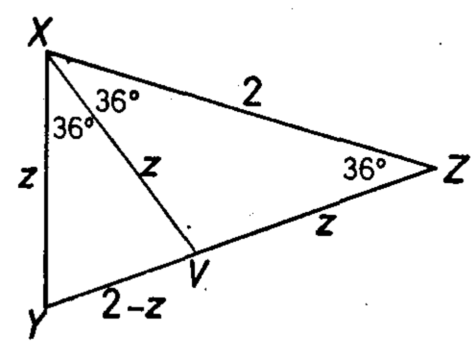
Először megmutatjuk, hogy $P_0D_0 = \sqrt{5}$. Pitagorász tétele alapján ugyanis $DD_0 = \sqrt{15}$, és ha a P, P_0 pontokat eleve $P_0D_0 = \sqrt{5}$ alapján jelöljük ki, akkor

$$PP_0 = DD_0\frac{AP_0}{AD_0} = \sqrt{15}\frac{5-\sqrt{5}}{5} = \sqrt{3}(\sqrt{5}-1),$$

vagyis $PP_0 = \sqrt{3}OP_0$, és emiatt az így kijelölt P pont mellett OP valóban átmegy B-n.

Rajzoljuk még meg az O középpontú 2 sugarú k_0 kört, és legyen ennek OF az egyik OA-ra merőleges sugara. Mivel D_0F hossza is $\sqrt{5}$, a P_0 pont a k_0 körbe írható szabályos öt- és tízszög szokásos megszerkesztésének is eleme. D_0 ugyanis felezi k_0 rajta átmenő sugarát, és P_0 a $D_0F = \sqrt{5}$ hosszúságú szakasz leforgatásából származik. Emiatt OP_0 a k_0-ba írható szabályos tízszög oldala, vagyis ha az OP_0 szakasz felező merőlegese k_0-t R-ben metszi, akkor az OP_0R egyenlő szárú háromszög alapján fekvő szögei $72°$-osak. Ezzel beláttuk,-hogy PP_0 a k kört a k-ba írható szabályos ötszög A-val szomszédos S csúcsában metszi, hiszen S-t az OR sugár is kimetszi, k-ból.

Megjegyzés. Legyen az XYZ háromszögben $XZ = YZ = 2$ és $XYZ\sphericalangle = 72°$. Messe az X-beli szögfelező YZ-t V-ben.



Akkor XYZ és VYX hasonló háromszögek, és $XY = XV = VZ$. Jelöljük ez utóbbit z-vel, akkor az előbbi hasonlóság miatt $(2-z) : z = z : 2$, vagyis $z^2 + 2z - 4 = 0$, $z = -1 \pm \sqrt{5}$, tehát $z = \sqrt{5} - 1$. Tehát a szokásos tízszögszerkesztésre való hivatkozás nélkül is látható, hogy OP_0R a szabályos tízszög egy szelete.