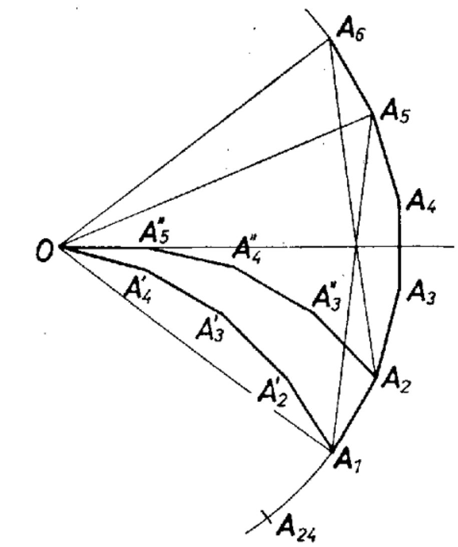
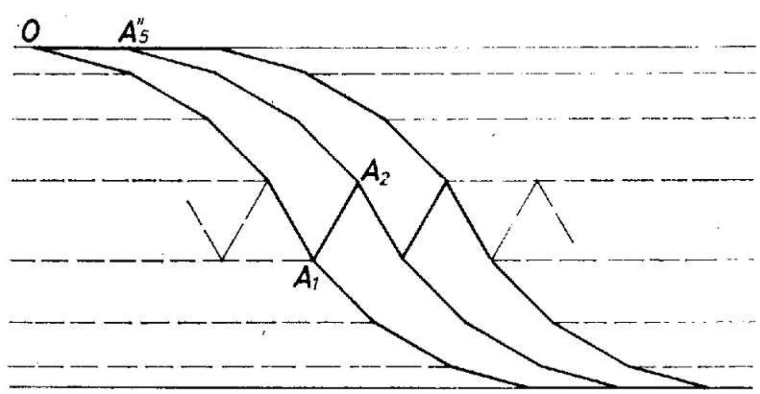
Tekintsük egy szabályos 24-szög 5 egymás utáni csúcsát, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5-öt. Jelöljük a 24-szög köré írható kör középpontját O-val. Az $A_1A_2A_3A_4A_5O$ hatszögben $A_1OA_5 \sphericalangle = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, azaz A_1OA_5 háromszög szabályos.



Forgassuk el az $A_1A_2A_3A_4A_5$ töröttvonalat A_1 körül 60°-kal befele (azaz a sokszög belseje felé), s jelöljük az elforgatott pontokat rendre A_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_5-vel. Majd forgassuk el az $A_2A_3A_4A_5A_6$ töröttvonalat A_2 körül ugyancsak 60°-kal befele. Az elforgatott pontok legyenek A_2, A''_3, A''_4, A''_5, A''_6. Mivel A_1OA_5 és A_2OA_6 is szabályos háromszögek, $A'_5 = O = A''_6$.

Az így kapott $A_1A'_2A'_3A'_4OA''_5A''_4A''_3A''_2$ 9-szögről belátjuk, hogy megfelel a feladat feltételeinek. Oldalai nyilván egyenlők. A szabályos 24-szög szögei 165°-osak; ezért $A''_3 \sphericalangle = A''_4 \sphericalangle = A''_5 \sphericalangle = 165^\circ$. Az A'_2, A'_3 és A'_4 csúcsokban a 9-szög konkáv szögei fekszenek, azaz ezek a szögek $360^\circ - 165^\circ = 195^\circ$-osak. A forgatás miatt $A_2A_1A'_2 \sphericalangle = A_3A_2A''_3 \sphericalangle - 60^\circ$, ahonnan $A_1A_2A''_3 \sphericalangle = 165^\circ = -60^\circ = 105^\circ$, és végül $A'_4OA''_5 \sphericalangle = 15^\circ$. Vagyis $A_1A'_2A'_3A'_4OA''_5A''_4A''_3A_2$ olyan egyenlő oldalú 9-szög, melynek szögei rendre 195°, 195°, 195°, 15°, 165°, 165°, 165°, 105°, 60°.

Most belátjuk, hogy a sík lefedhető egyrétűen és hézagtalanul ilyen egybevágó lapocskákkal. Rakjunk két 9-szöget egymás mellé úgy, hogy a 15°-os szöghöz csatlakozzék a következő 9-szögnek az első 165°-os szöge. Mivel $15^\circ + 165^\circ = 180^\circ$, e pontok egy egyenesbe esnek. Az alakzat másik végén egy „ fésűfog"-szerű nyílás marad. Illesszünk mindkét idom mellé az előzőhöz képest 180°-kal elforgatott 9-szögeket, az ábra szerint. Az illeszkedések mentén valóban nem keletkeznek hézagok, hiszen a közbülső csúcsokban egy 165°-os és egy 195°-os szög találkozik. Mivel ezek összege 360°, a találkozási pontban kitöltik a síkot. Végül a fésűs csúcsban a szögek összege $105^\circ + 60^\circ + 195^\circ$, ugyancsak 360°. A négy 9-szög együttesen, tehát lefed egy sávot, ilyen sávokkal pedig ki tudjuk tölteni a síkot a kívánt módon.

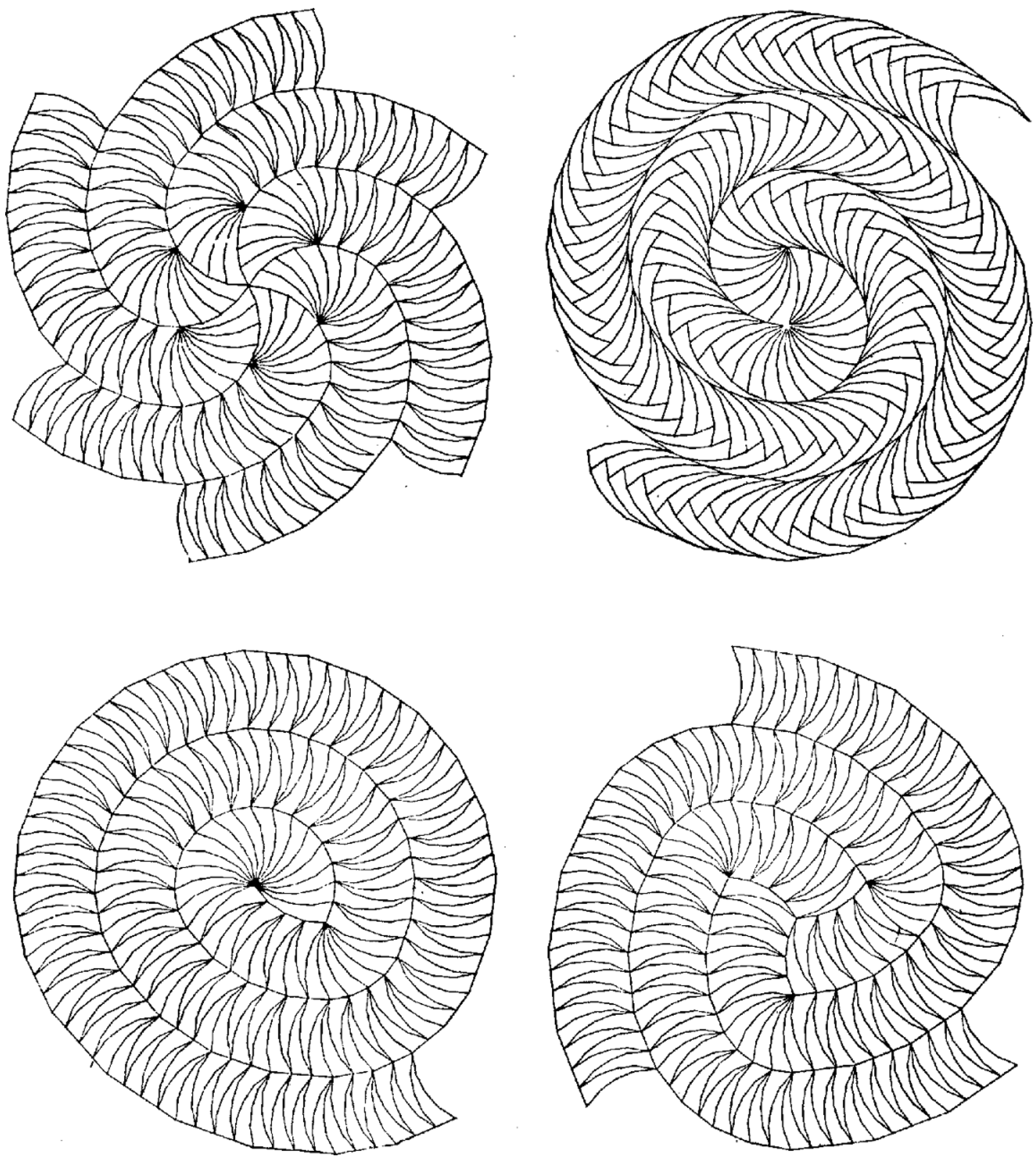


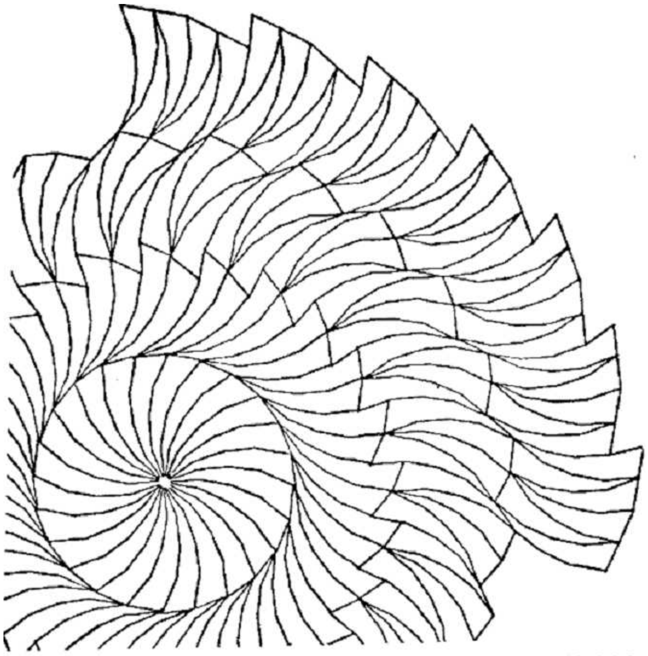
1. ábra

2. ábra

Megjegyzés: Ezzel az elhelyezéssel párhuzamos egyenesek által határolt sávokat fedtünk le (2. ábra).

Számos olyan lefedése található a síknak, melyben az adott alakzatok egy középpont körül spirál alakban helyezkednek el. Először csak olyan spirálokat találtak, amelyekben a középpontból páros számú „kar” indult ki. Két évvel ezelőtt találtak olyan spirált, melyben a középpontból páratlan számú kar indult ki. Ilyen spirálokat mutatnak az alábbi és a borító 4. oldalán levő ábrák. Az ezeket határoló sávok oldalvonalai mindkét irányban 15°-kal vagy annak többszörösével meg vannak törve. [Az ábrákat a Mathematics Teaching (Anglia) folyóirat 1979. évi szeptemberi számából vettük ki.]





Spirál–csempézés – Az ábra a sík – egy bizonyos fajta 9-szöggel való – kitöltését mutatja, mely az 1898. gyakorlat megoldásával kapcsolatos. (A hátsó borító ábrája kicsinyítve)