Mivel az egyenlőség minden valós x-re fennáll, teljesül az $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$ esetekben is. Ezeket rendre behelyettesítve a mondott összefüggésbe, az alábbi három egyenletet kapjuk:

$$2^q = p + q, \tag{1}$$
$$2^{p+q} = 2p + q, \tag{2}$$
$$2^{2p+q} = 4p + q. \tag{3}$$

Vonjuk ki a (2) egyenletből az (1)-t, majd a (3)-ból a (2)-t:

$$2^q(2^p - 1) = p, \tag{4}$$
$$2^{p+q}(2^p - 1) = 2p. \tag{5}$$

Tegyük fel először, hogy $2^p \neq 1$, azaz $p \neq 0$. Ekkor az (5) egyenletet a (4)-gyel osztva $2^p = 2$ adódik, ahonnan $p = 1$-et kapjuk. Ezt (1)-be és (2)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$2^q = 1, \qquad \text{tehát} \qquad q = 0.$$

A $p = 1$, $q = 0$ értékpár valóban megoldás, hiszen ekkor az eredeti összefüggés azonosság.

Külön kell vizsgálnunk a $p = 0$ esetet. Ekkor a vizsgált egyenlőség két oldala x-től független, feladatunk most a

$$2^q = q$$

egyenlet vizsgálata.

Azt állítjuk, hogy minden valós q-ra $2^q > q$, tehát $q = 0$ mellett nincs megoldás. Ehhez szükségünk van az alábbi egyenlőtlenségre:

$$2^n \geq n + 1, \qquad \text{ha } n \text{ egész szám.} \tag{*}$$

A fenti egyenlőtlenség nyilván teljesül, ha $n < 0$, hisz ekkor a jobb oldal nem pozitív. Ha $n = 0$, akkor egyenlőség van (*)-ban. Tegyük fel, hogy (*) teljesül n-re, ahol $n \geq 0$; belátjuk, hogy ekkor $(n + 1)$-re is teljesül.

Valóban, $2^{n+1} = 2^n + 2^n \geq n + 1 + 2^n \geq n + 1 + 2^0 = n + 2$.

Ezzel a (*) egyenlőtlenséget minden egész n-re igazoltuk.

Legyen most q egy tetszőleges valós szám. Ekkor $[q] + 1 > q \geq [q]$, ahol $[q]$ a q-nál nem nagyobb egészek legnagyobbika.

Így $2^q \geq 2^{[q]} \geq [q] + 1 > q$, tehát $p = 0$ esetben valóban nem kapunk további megoldást.

Így a feladat megoldása: $p = 1$; $q = 0$.

Alberti Gábor (Budapest, Árpád Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. Mutatunk egy másik lehetőséget a $p \neq 0$ eset tisztázására. Ismeretes, hogy az $f(x) = 2^x$ függvény értékkészlete a pozitív valós számok halmaza. Ha $p \neq 0$, akkor a $px+q$ minden valós értéket fölvesz, így a $g(x) = +2^{px+q}$ függvény értékkészlete is a pozitív valós számok halmaza. A jobb oldalon álló függvény értékkészlete a q-nál nagyobb vagy a q-nál kisebb valós számok halmaza, attól függően, hogy p pozitív vagy negatív. Miután a két függvény egyenlő, így értékkészletük is azonos, ami azt jelenti, hogy p pozitív és $q = 0$, amiből $2^{px} = p \cdot 2^x$ következik. Mivel az egyenlőség $x = 0$-ra is fennáll, így $2^0 = p$, tehát $p = 1$.