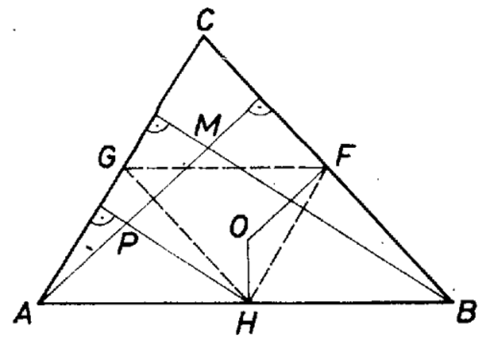
I. megoldás. Jelöljük a CA, AB szakaszok felezőpontját G-vel és H-val, az AGH háromszög magasságpontját P-vel. Ismeretes, hogy a háromszögek középvonalai párhuzamosak a háromszög oldalaival, ezért az ABC, AHG háromszög A-ból induló magasságvonala azonos. Mivel a BM, HP egyenesek egyaránt merőlegesek AC-re, párhuzamosak egymással. Emiatt a PH egyenes középvonal az AMB háromszögben, és P felezi az AM szakaszt. Az $AHFG$ négyszög paralelogramma, melyet a GH átló két egybevágó részre vág, és e részek a GH felezőpontjára nézve szimmetrikusak. Ez a szimmetria P-t O-ba viszi, hiszen $AP \parallel OF$, $PG \parallel OH$, $PH \parallel OG$. Tehát $OF = PA = \frac{1}{2}AM$.

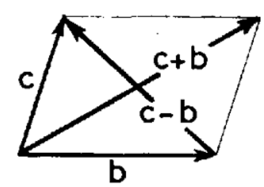


II. megoldás. Jelöljük általában a P-ből Q-ba mutató vektort $\overrightarrow{PQ}$-val. Megmutatjuk, hogy az $\overrightarrow{AM}$, $2 \cdot \overrightarrow{OF}$ vektoroknak nemcsak a hosszuk egyenlő, hanem maguk a vektorok is egyenlőek. Ha még az O-ból A-ba, B-be, C-be mutató vektorokat rendre $\mathbf{a}$-val, $\mathbf{b}$-vel, $\mathbf{c}$-vel jelöljük, és felhasználjuk, hogy $2 \cdot \overrightarrow{OF} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ kapjuk, hogy állításunk ekvivalens az

$$\mathbf{a} - \overrightarrow{OM} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

összefüggéssel. Azt kell tehát belátnunk, hogy

(1) $$\overrightarrow{OM} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}.$$



Legyen M az (1) összefüggéssel definiált pont, megmutatjuk, hogy $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BC}$. Valóban, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AM} = \mathbf{c} + \mathbf{b}$ és a $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok hossza egyenlő (hiszen O az ABC háromszögbe írt kör középpontja). Emiatt a $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok összeadásához használt paralelogramma rombusz és a $(\mathbf{c} + \mathbf{b})$, $(\mathbf{c} - \mathbf{b})$ vektorok állását ennek a rombusznak az átlói adják. Hasonlóan látható be, hogy $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{AB}$.

Megjegyzés. Hamarabb célhoz érünk, ha az ABC, FGH háromszögek hasonlóságára hivatkozunk. Hogy ezt nem tettük, az annak érdekében történt, hogy megmutassuk, esetünkben csak a 2:1 arányú hasonlóság tulajdonságaira van szükség, és ezek még visszavezethetőek az egybevágóság tulajdonságaira. A bizonyított állítás alapján könnyen belátható, hogy az OM szakaszt az ABC háromszög súlypontja harmadolja. Tovább menve megkaphatjuk az ún. Feuerbach kör tulajdonságait.