

I. megoldás. Ha az x , y , z közül legalább az egyik nulla, akkor az egyenletekből következően mindegyik az, és $x = y = z = 0$ nyilván megoldás. Tehát feltehetjük, hogy az x , y , z közül egyik sem nulla. Összeszorozva a három egyenletet, a kapott egyenlet mindkét oldalát $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$ -tel szorozva (ez biztosan nem nulla) és xyz -vel osztva (ez sem nulla) kapjuk:

$$8xyz = (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2).$$

Mivel tetszőleges a számra $0 \leq (1-a)^2 = 1 - 2a + a^2$, tehát $2a \leq 1 + a^2$, és itt egyenlőség csak $a = 1$ értékre állhat:

$$2x \cdot 2y \cdot 2z \leq (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2),$$

és egyenlőség csak $x = y = z = 1$ esetben teljesül.

Tehát az egyenletrendszernek két megoldása van: az $x = y = z = 0$ és az $x = y = z = 1$.

II. megoldás. Az egyenletek bal oldala nemnegatív, így feltehetjük, hogy $x \geq 0$; $y \geq 0$; $z \geq 0$.

Mivel $(1-a)^2 = 1 - 2a + a^2 \geq 0$, $1 + a^2 \geq 2a$, tehát ha $a \geq 0$, akkor

$$\frac{2a^2}{1+a^2} \leq a,$$

és pontosan akkor van egyenlőség, ha $a = 0$ vagy $a = 1$.

Ezt felhasználva fennáll a következő egyenlőtlenség-lánc:

$$y = \frac{2x^2}{1+x^2} \leq x = \frac{2z^2}{1+z^2} \leq z = \frac{2y^2}{1+y^2} \leq y.$$

Ez csak úgy lehet, ha mindenütt egyenlőség teljesül. Ez – mint láttuk – csak $x = y = z = 0$ vagy $x = y = z = 1$ mellett áll fenn, ezek valóban megoldásai az egyenletnek.