

I. megoldás. Ha az ezernél kisebb n természetes számhoz ezret adunk, a számjegyeinek összege eggyel nő. 1980 helyett 2000-et véve, az összegben tehát az n és $1000 + n$ számok közül pontosan az egyik szerepel. Emiatt az

$$A = 0 + 1 + 2 + \dots + 999 = 500 \cdot 999$$

összeg pontosan 1000 B -vel kevesebb azoknak a 2000-nél kisebb természetes számoknak az összegénél, amelyekben a számjegyek összege páros, ahol B azoknak az ezernél kisebb természetes számoknak a száma, amelyekben a számjegyek összege páratlan.

Ha az ezernél kisebb n természetes számot kivonjuk 999-ből, a kivonás jegyenként végezhető, sehol nem marad maradék. A megfelelő számjegyek összege tehát mindhárom helyi értékre 9 (ha a 100-nál kisebb számokat 0 számjegyekkel háromjegyűekké egészítjük ki). Emiatt az n és $999 - n$ számok közül pontosan az egyikben páratlan a számjegyek összege, tehát $B = 500$.

Adjuk össze végül azokat az n természetes számokat, amelyekre $1980 \leq n < 2000$, és a számjegyek összege páros:

$$\begin{aligned} C &= 1980 + 1982 + 1984 + 1986 + 1988 + 1991 + 1993 + 1995 + 1997 + 1999 = \\ &= 19\,895. \end{aligned}$$

A keresett összeg tehát

$$S = A + 1000B - C = 500 \cdot 999 + 500 \cdot 1000 - 19\,895 = 979\,605.$$

Molnár István (Nyíregyháza, Krúdy Gy. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Osszuk el 20-szal a tetszőleges n számot, és jelöljük a hányadost h -val, a maradékot m -mel:

$$n = 20h + m, \quad 0 \leq m < 20.$$

Ha ebben az összefüggésben mindhárom szám helyére a számjegyeinek az összegét írjuk, az összefüggés érvényben marad. Az n szám utolsó jegye ugyanis egyenlő m utolsó jegyével, a $H = 20h$ szám utolsó jegye 0. n utolsó előtti jegye megoszlik H és m utolsó előtti jegyei között: ha ez a jegy páratlan, mondjuk $2k + 1$, akkor H utolsó előtti jegye $2k$, m -é pedig 1, különben n és H utolsó előtti jegyei egyenlőek, m -é 0.

Ha az m maradék 0 és 20 közt fut, és H állandó, az esetek felében, a

$$0, 2, 4, 6, 8, 11, 13, 15, 17, 19$$

számokra lesz m számjegyeinek összege páros. Ezek összege egyenlő a többi lehetséges maradék összegével. Emiatt azoknak az n számoknak az összege, amelyekre $H = 20h \leq n < H + 20$, és n számjegyeinek az összege páros, egyenlő a H és $H + 19$ közötti számok összegének felével. Mivel pedig 1980 osztható 20-szal, ez maga után vonja, hogy a keresett összeg egyenlő az 1980-nál kisebb természetes számok összegének felével:

$$S = 0 + 1 + 2 + \dots + 1979 = \frac{990 \cdot 1979}{2} = 979\,605.$$