Mielőtt megoldanánk a feladatot, ismételjünk át néhány olyan összefüggést, amely a háromszög beírt és körülírt körének sugara és a háromszög oldalai között áll fenn.

Az érintő szakaszok hossza

Az ABC háromszög beírt körének O középpontjából állítsunk merőlegest az oldalakra. Az AB-re állított merőleges talppontja P, a BC-é Q, az AC-é R. A háromszög bármely csúcsát kötjük össze O-val, ez szimmetriatengelye a körnek s így nyilván

(1) $$AP = AR = x, \qquad BP = BQ = y, \qquad CQ = CR = z.$$

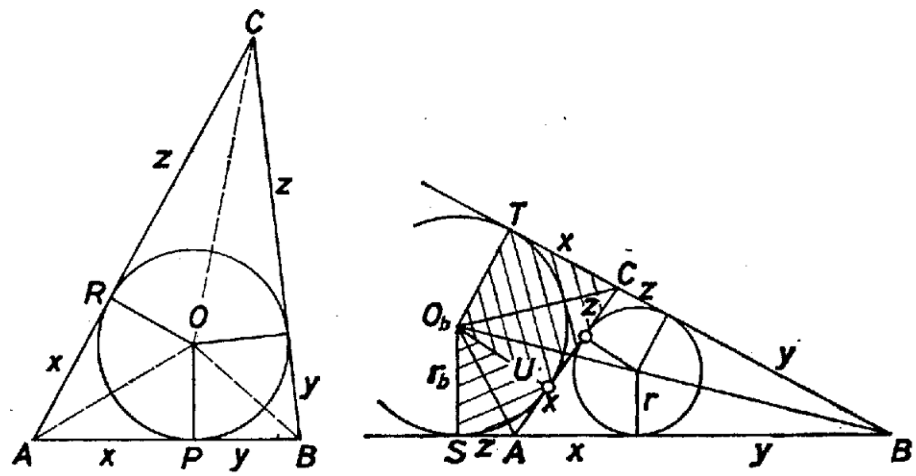
Az $x + y + z$ összeg a háromszög kerületének fele és s-sel szoktuk jelölni.

A háromszög területe

Az ABC háromszög területét megkapjuk, ha az AOB, BOC, COA háromszögek területét összeadjuk. Rendre felírva a területeket, ha a beírt kör sugarát ϱ-val jelöljük (az ábrán r és r_b szerepel ϱ és ϱ_b helyett)

(2) $$t = \frac{(x+y)\varrho}{2} + \frac{(y+z)\varrho}{2} + \frac{(z+x)\varrho}{2} = (x+y+z)\varrho = s\varrho$$

összefüggést kapjuk.



A háromszöghöz írt körök sugara

Rajzoljuk meg az ABC háromszög b oldalához írt kört, vagyis azt a kört, amely a b oldalt, valamint az a és c oldalak meghosszabbítását érinti. Jelöljük az érintési pontokat a c oldalegyenesén S-sel, a b oldalegyenesén T-vel.

Nyilván $BS + BT = y + x + AS + y + z + CT = 2(x + y + z) = 2s$ az $AS + CT = AC = z + x$ miatt.

De $BT = BS = s$ és így

(3) $$AS = z \qquad \text{és} \qquad CT = x.$$

Jelöljük a b oldalhoz hozzáírt kör középpontját O_b-vel, sugarát ϱ_b-vel. Az ABC háromszög területét felírhatjuk a következőképpen: az O_bSB háromszög területének kétszereséből levonjuk az O_bSA és O_bTC háromszögek területének kétszeresét. Felhasználva a (3) alatti összefüggéseket

$$t = \varrho_b(x + y + z) - z\varrho_b - x\varrho_b = \varrho_b y,$$

ahonnan

$$\varrho_b = \frac{t}{y}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

(4) $$\varrho_a = \frac{t}{x}, \qquad \varrho_c = \frac{t}{z}.$$

Áttérve eredeti feladatunk megoldására

(5) $$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{x+y+z}{t'} = \frac{s}{t} = \frac{s}{s\varrho} = \frac{1}{\varrho} = 1.$$

Kihasználtuk azt a feltételt, hogy a beírt kör sugara 1, és t helyébe a (2) alatt kapott ϱs kifejezést helyettesítettük.

Feladatunkban az (5) alatti egyenletet kell megoldanunk, mégpedig felhasználva, hogy ϱ_a, ϱ_b és ϱ_c egészek.

Az 1849. gyakorlatban éppen azt láttuk be, hogy $n \geqq 3$-ra van az egyenletnek különböző számokból álló megoldása. Most keressük meg az összes megoldást. Nem nehéz észrevenni, hogy ϱ_a, ϱ_b és ϱ_c közül legfeljebb egy lehet csak 2-vel egyenlő, a másik kettő nagyobb 2-nél. Továbbá az is nyilvánvaló, hogy nem lehet mindegyik 4, mert így összegük kisebb lenne 1-nél, kell tehát, hogy legyen köztük 4-nél kisebb, azaz 2 vagy 3.

Az általánosítás megszorítása nélkül választhatjuk a jelölést úgy, hogy $\varrho_a \leqq \varrho_b \leqq \varrho_c$ legyen.

Ha $\varrho_a = 2$, akkor $\varrho_b = \varrho_c = 4$ vagy $\varrho_b = 3$, $\varrho_c = 6$. A másik lehetőség, hogy $\varrho_a = \varrho_b = \varrho_c = 3$.

Próbáljuk meg most a háromszög területét kifejezni a beírt és hozzáírt körök sugaraival.

A (4) alatti egyenleteket összeszorozva

$$(6) \qquad \varrho_a \varrho_b \varrho_c = \frac{t^3}{xyz} .$$

Az O_bSA és AOP háromszögek hasonlóságából

$$\frac{\varrho_b}{x} = \frac{z}{\varrho}, \text{ s mivel } \varrho = 1, \text{ így a } \varrho_b = xz$$

összefüggést kapjuk, amit (4)-gyel összevetve

$$\varrho_b = \frac{t}{y} = xz, \qquad \text{ahonnan} \qquad t = xzy.$$

Írjuk ezt a (6) alatti összefüggésben az egyik t helyébe

$$\varrho_a \varrho_b \varrho_c = \frac{t^2}{xyz} \cdot xyz = t^2,$$

ahonnan $t = \sqrt{\varrho_a \varrho_b \varrho_c}$.

Behelyettesítve ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c szóba jött értékhármasait

$$t = \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 4} = \sqrt{32}, \qquad t = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt{36} = 6, \qquad t = \sqrt{27}.$$

Láthatjuk, hogy csak egy esetben kaptunk egész értéket, amikor is $t = 6$.

$$\varrho_a = 2, \qquad \varrho = 3, \qquad \varrho_c = 6.$$

$$\text{(4)-ből} \quad x = \frac{t}{\varrho_a} = 3, \qquad y = \frac{t}{\varrho_b} = 2, \qquad z = \frac{t}{\varrho_c} = 1.$$

Így a keresett háromszög oldalaira az

$$a = y + z = 3, \qquad b = z + x = 4, \qquad c = x + y = 5$$

értékeket kapjuk. A feltételeknek tehát a 3, 4, 5 egység oldalú derékszögű háromszög tesz eleget.