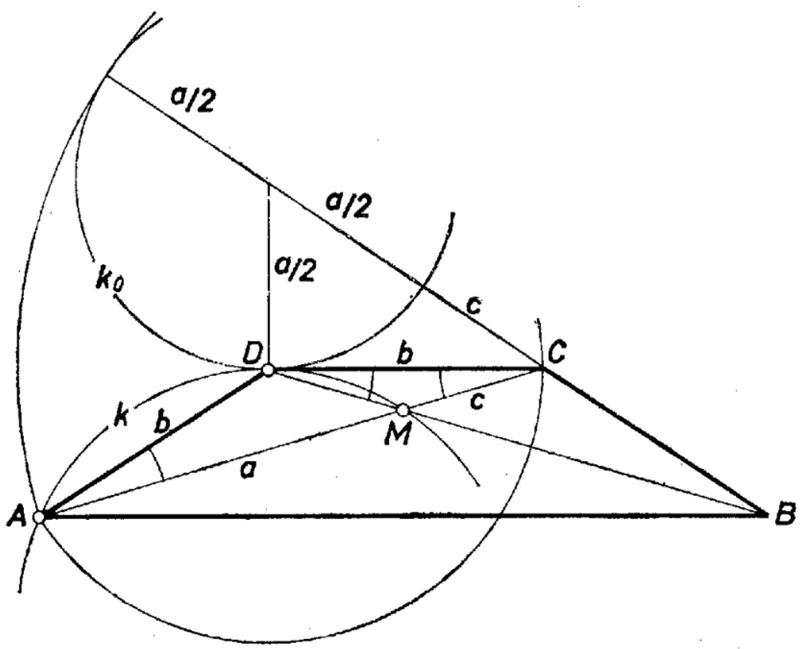
Feltevésünk szerint az $ADC$ háromszög egyenlő szárú, és mivel $C$-nél levő szöge azonos az ugyancsak egyenlő szárú $CDM$ háromszög $C$-beli szögével, a $DAM$ és $CDM$ szögek is egyenlőek. Emiatt az $ADM$ háromszög köré írható $k$ körnek a $CD$ egyenes érintője, hiszen $DAM\sphericalangle$ a $DM$ íven nyugvó kerületi szög, és a $CDM$ szög egyenlő vele. Így a körhöz húzott szelődarabok tétele szerint

$$b^2 = c(a + c), \tag{1}$$

ahol $c = CM$. Rajzoljunk ezért egy $a/2$ sugarú $k_0$ kört, és ennek egy $D$ pontjában mérjünk fel az érintőre egy $b$ hosszúságú szakaszt, ennek végpontja legyen $C$. Kössük össze $C$-t $k_0$ középpontjával, ennek az egyenesnek $C$-től $k_0$-ig tartó darabja éppen $c$ hosszúság, hiszen (1) most is igaz, és a szelő $k_0$-beli darabja éppen $k_0$ átmérője. (Mivel [1] jobb oldala $c$-nek monoton növő függvénye, csak egy pozitív $c$ lehet megoldás.) Ha már ismerjük $c$-t, a $CDM$, $ADC$ háromszögek, végül a keresett $ABCD$ trapéz könnyen előállíthatóak.




A szerkesztés akkor végezhető el, ha a $b$, $c$ szakaszokkal egyenlő szárú háromszög szerkeszthető, vagyis $2c > b$. Mivel (1) ekvivalens a

$$(2c - b)(2b + c) = c(3b - 2a) \tag{2}$$

egyenlettel, ez olyan pozitív számokra, amelyekre (1) teljesül, akkor és csakis akkor igaz, ha $3b > 2a$, ez tehát a szerkeszthetőség feltétele. (Szemléletesen szólva, ha $2c$ már közel van $b$-hez, akkor a $CDM$ háromszög nagyon lapos, $M$ közel van a $CD$ felezőpontjához, és $AM$ közel van 1,5 $AD$-hez.)

Ha a $CDM$ háromszög megszerkeszthető, a belőle kapott $ABCD$ trapéz mindig megfelelő, hiszen amikor a $CDM$ háromszöghöz hasonló $ABC$ háromszöget megszerkesztjük, abban (1) miatt $AM$ hossza éppen $a$ lesz. A feladat tehát mindig egyértelműen megoldható, ha $3b > 2a$, különben nincs megoldás.

*Megjegyzés.* Az (1) egyenlet az ún. aranymetszés egyenlete. Erről lapunkban már sokszor esett szó, például az 1979. évi novemberi szám 128. oldalán az F. 2209. megoldása során. Ott említettük, hogy ez a szerkesztés nem más, mint egy szakasz aranymetszés szerinti kettéosztása, ami viszont a szabályos ötszög Euklidésztől származó szerkesztésének az általánosítása. Az érdeklődők erről részletesen lapunk 1977. évi novemberi számában olvashatnak a 135. oldalon (lásd még KÖMAL 1962. májusi szám 201. oldala).