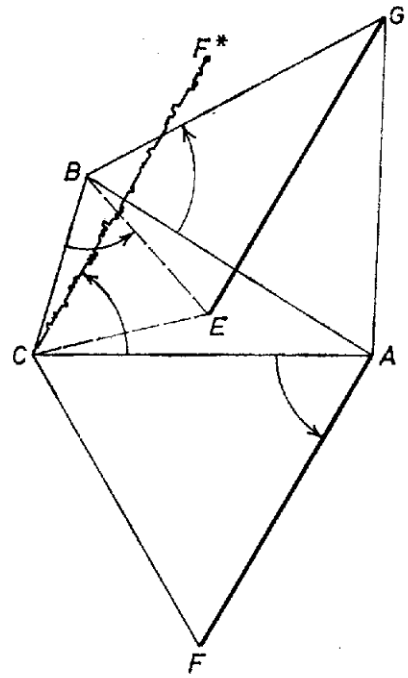
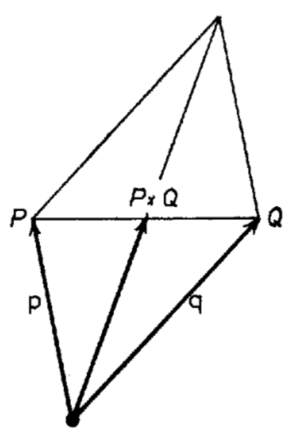
I. megoldás. Jelöljük a $B+C$, $A+C$, $B+A$ pontokat E, F, G-vel. Ez az „összeadás” nem kommutatív, például az $F^*=C+A$ pont nem azonos F-fel, hanem annak az AC szakasz felezőpontjára vonatkozó tükörképe: az AF, CF^* szakaszok rendre az AC szakasz $60°$-os elforgatásával keletkeznek, de az első esetben A körül, a másodikban C körül forgatunk (1. ábra).



1. ábra

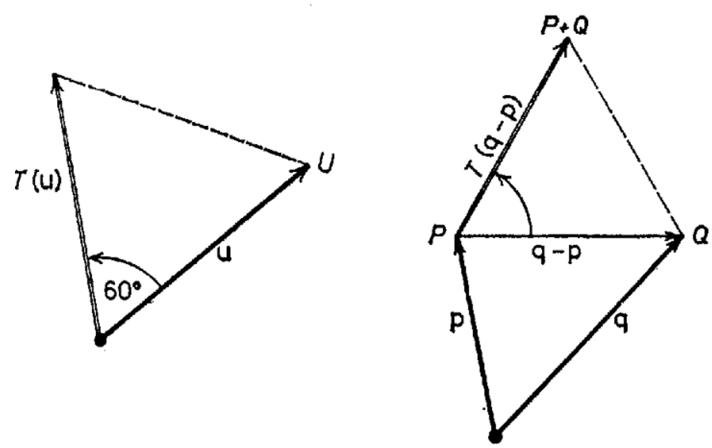
Elforgathatjuk az AC szakaszt B körül is $60°$-kal, ekkor külön el kell forgatnunk az A csúcsot B körül, így éppen G-t kapjuk, és külön forgatni kell B körül C-t, amikoris E-t kapjuk. Mivel a különböző centrumú forgatások párhuzamos és egyállású eredményre vezetnek, EG-t CF^*-ból a C-t E-be vivő eltolással is megkaphatjuk. Ez viszont FA-ból az F-et C-be vivő eltolással kapható meg, így végül is azt kaptuk, hogy az F-et E-be vivő eltolás A-t G-be viszi. Ámde ekkor F és G az AE szakasz felezőpontjára nézve szimmetrikusan helyezkedik el, és ez épp az, amit bizonyítanunk kellett.

II. megoldás. A sík tetszőleges pontjába mutató helyvektorokat jelöljük rendre a megfelelő kisbetűvel. (A helyvektor olyan vektor, melynek kezdőpontja a sík egy rögzített pontja.) A $P\times Q$ művelet eredménye a PQ szakasz felezőpontja, s így a vektorok összeadási szabályai szerint ennek a pontnak az $\frac{1}{2}(\mathbf{p}+\mathbf{q})$ vektor felel meg (2. ábra).



2. ábra

Jelentse $T(\mathbf{u})$ azt a vektort, amelyet úgy kapunk meg, hogy az $\mathbf{u}$ vektort pozitív (az óramutató járásával ellentétes) irányba elfordítjuk $60°$-kal. Így a $P+Q$ pontba mutató helyvektor $\mathbf{p}+T(\mathbf{q}-\mathbf{p})$ alakba írható (3. ábra). Ezek felhasználásával írjuk fel az (1) alatti műveletek eredményeihez tartozó helyvektorokat.



3. ábra

A bal oldal helyvektorának a kétszerese

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+T(\mathbf{c}-\mathbf{b}),$$

a jobb oldal helyvektorának a kétszerese

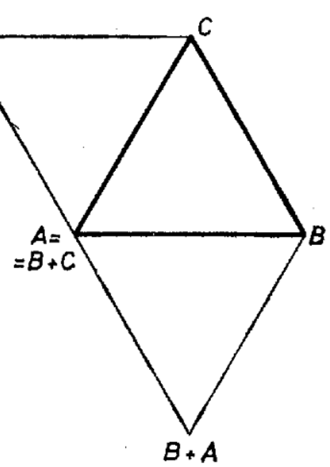
$$\mathbf{b}+T(\mathbf{a}-\mathbf{b})+\mathbf{a}+T(\mathbf{c}-\mathbf{a}).$$

Azt kell igazolnunk, hogy ez a két vektor egyenlő. Ehhez elég azt belátnunk, hogy

$$T(\mathbf{c}-\mathbf{b})=T(\mathbf{a}-\mathbf{b})+T(\mathbf{c}-\mathbf{a}),$$

ahol $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}-\mathbf{b}$ egy háromszög három oldalának vektorai, mégpedig úgy, hogy az első kettő összege éppen a harmadik. De ebből következik, hogy igaz az egyenlőség, mert két oldal 60°-os elforgatottjának összege egyenlő az összeg 60°-os elforgatottjával. Ezzel igazoltuk az (1) egyenlet helyességét.

Megjegyzések 1. Az I. megoldás szerint dolgozók úgy fejezték be megoldásaikat, hogy az A, F, E, G pontok paralelogrammát határoznak meg, tehát a szemközti csúcsokat összekötő szakaszok felezőpontjai egybeesnek. Ez igaz, és megoldásaikat 2 ponttal értékeltük. De megjegyezzük, hogy a megoldásuk hiányos, hiszen nem foglalkoztak azokkal az esetekkel, mikor e négy pont egy egyenesbe esik, pl. ha A, B, C egy szabályos háromszög csúcsai (4. ábra).



4. ábra

2. A megoldók egy része a forgásirányt rosszul értelmezte, és olyan szabályos háromszöget szerkesztett, melynek körüljárási iránya megegyezett az óramutató járásával, azaz negatív. A feladat állítása így is igaz, s a bizonyítás hasonlóan megy, ezért az ő megoldásaikat is elfogadtuk.