

A feladat értelmezése alapján  $n \geq 2$  föltehető. Ha  $n = 2$ , akkor  $x_1$  és  $x_2$  egyike sem lehet 1, mert akkor a másik reciproka 0 volna. Ha egyik sem 1, akkor  $\frac{1}{x_1} \leq \frac{1}{2}$  és  $\frac{1}{x_2} \leq \frac{1}{2}$ , de mivel  $x_1 \neq x_2$ , így legfeljebb az egyik helyen állhat egyenlőség, tehát  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  bármely két 1-től és egymástól különböző természetes számra. Tehát  $n = 2$  nem felel meg a kérdésnek.

A továbbiakban  $n$ -re vonatkozó teljes indukcióval belátjuk, hogy ha  $n \geq 3$ , akkor az egyenletnek van különböző természetes számokból álló megoldása. Ha  $n = 3$ , akkor  $x_1 = 2, x_2 = 3; x_3 = 6$  megoldás. Ha  $n > 3$ -ra a nagyság szerint felírt  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  számok megoldások, akkor az  $x'_1 = 2; x'_2 = 2x_1; \dots; x'_n = 2x_{n-1}; x'_{n+1} = 2x_n$  számokra egyrészt  $x'_1 < x'_2 < \dots < x'_{n+1}$  hiszen  $x_1 > 1$ , másrészt

$$\frac{1}{x'_1} + \frac{1}{x'_2} + \dots + \frac{1}{x'_{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1,$$

így a kapott  $n + 1$  különböző szám is megoldás.

Tehát ha  $n > 2$ , akkor a feladatnak van megoldása.