Mivel a, b, c pozitív, a gyök alatti kifejezésekhez rendre $4a^2$, $4b^2$, $4c^2$-et adva növeljük a bal oldalon álló kifejezés értékét:

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}< \; < \sqrt{4a^2+4a+1}+\sqrt{4b^2+4b+1}+\sqrt{4c^2+4c+1}. \tag{1}$$

Itt viszont:

$$\sqrt{4a^2+4a+1}+\sqrt{4b^2+4b+1}+\sqrt{4c^2+4c+1}= \\ =\sqrt{(2a+1)^2}+\sqrt{(2b+1)^2}+\sqrt{(2c+1)^2}. \tag{2}$$

Ha a, b, c pozitív, $2a+1$, $2b+1$, $2c+1$ is pozitív, tehát:

$$\sqrt{(2a+1)^2}+\sqrt{(2b+1)^2}+\sqrt{(2c+1)^2}=(2a+1)+(2b+1)+(2c+1). \tag{3}$$

Rendezve és felhasználva az $a+b+c=1$ feltételt:

$$2a+1+2b+1+2c+1=2(a+b+c)+3=5.$$

Tehát az állítás igaz.

Megjegyzés. Látható, hogy az a, b, c pozitivitása az egyenlőtlenség teljesüléséhez nem szükséges feltétel. Rögtön következik, hogy a pozitivitás helyett az eredeti gyökös kifejezés értelmezhetőségéhez szükséges $a\geq -0,25$, $b\geq -0,25$, $c\geq -0,25$ feltétel is elegendő, mert (1) teljesüléséhez az kell, hogy a, b, c ne legyen egyszerre 0, s ez az $a+b+c=1$ feltételből következik. (3) teljesüléséhez pedig $2a+1\geq 0$, $2b+1\geq 0$, $2c+1\geq 0$ is elegendő, s így az enyhített feltételek mellett a bizonyítás változatlanul érvényben marad.

Az (1) lépésben egyenlőséget csak $a=b=c=0$ esetén kapnánk, márpedig $a+b+c=1$. Ez azt sugallja, hogy finomabb eljárással kifejezésünkre az enyhített feltételek mellett is (*)-nál jobb korlát adható. Valóban, alkalmazzuk a számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenséget (tetszőleges x, y, z valós számokra $\frac{x+y+z}{3}\leq\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$ és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x=y=z$). Eszerint

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\leq 3\sqrt{\frac{4a+1+4b+1+4c+1}{3}}=\sqrt{21}\approx 4{,}58<5.$$

Az egyenlőség $a=b=c=1/3$ esetén teljesül. Tehát a kifejezés legnagyobb értékét a feltételek módosítása nem befolyásolta.