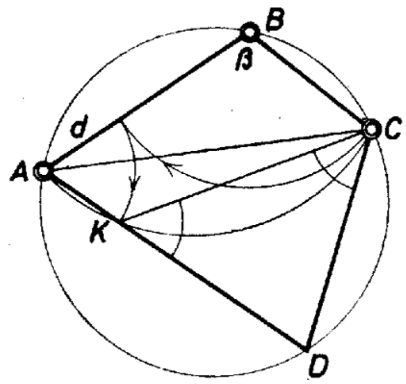
Egy négyszög akkor húrnégyszög, ha írható köréje kör. Mivel 3 pont a kört meghatározza, D-t úgy kell megválasztanunk, hogy rajta legyen az A, B, C pontok által meghatározott körön. E kört mindig meg tudjuk szerkeszteni, ha a 3 pont nem esik egy egyenesbe.

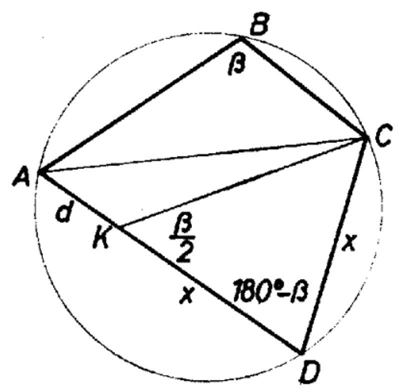
Mivel a négyszög érintőnégyszög is, ezért szemközti oldalainak összege egyenlő, így $AB+CD=BC+AD$, azaz átrendezve $|AD-CD|=|AB-BC|=d$. Mivel A, B, C, D a megadott sorrendben határozza meg a négyszöget, a D pontot a B-t nem tartalmazó AC íven kell keresnünk.

Feltehetjük, hogy $AB>BC$ (ha nem így lenne, betűzzük át a pontokat), akkor az oldalösszegekre fennálló egyenlőség miatt $AD>CD$, és különbségük – d – ismert.



Tekintsük négyszögünket megszerkesztettnek, és mérjük fel A-ból az AD szakaszra a d távolságot. Jelöljük a végpontját K-val. A CKD háromszög egyenlő szárú, D csúcsnál levő szöge ismert, hiszen az $ABC\sphericalangle=\beta$-t $180°$-ra egészíti ki. Így a $DKC\sphericalangle=\dfrac{180°-(180°-\beta)}{2}=\dfrac{\beta}{2}$. Az AKC háromszög tehát megszerkeszthető 2 oldala és a nagyobbikkal szemben levő szöge ismeretében.

A négyszög szerkesztésének menete a következő: az A, B, C pontok köré kört szerkesztünk, majd az AC oldal fölé $180°-\dfrac{\beta}{2}$ látószögű kört. Ezt A-ból d távolsággal elmetszve kapjuk a K pontot. Az AK egyenes metszi ki a körből D-t.



Az így kapott négyszög valóban húrnégyszög, de egyben érintőnégyszög is. Könnyen kiszámolhatjuk a $DCK\sphericalangle$-t

$$DCK\sphericalangle=180°-\left(\frac{\beta}{2}+180°-\beta\right)=\frac{\beta}{2}.$$

A CDK háromszögben $CD=DK=x$, így $AB+CD=AB+x$, $BC+AD=BC+d+x$, és mivel $AB=BC+d$, a két összeg valóban egyenlő. Ez pedig szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy négyszög érintőnégyszög legyen.

A feladatnak mindig van megoldása, ha A, B, C nem esik egy egyenesbe, és mindig 1 megoldása van, mivel $d=|AB-BC|<AC$ mindig teljesül a háromszög oldalaira fennálló összefüggés miatt. Ha $AB=BC$, akkor a húrnégyszög deltoid, és D-t a B-ből az AC-ra állított merőleges metszi ki a körből.

Alberti Gábor (Budapest, Árpád Gimn., I. o. t.)