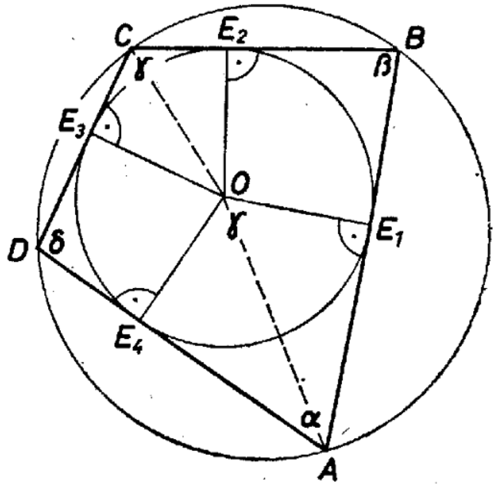
Jelöljük a beírt kör középpontját O-val, az oldalakkal való érintési pontjait E_1, E_2, E_3, E_4-gyel, ahol E_1 az AB_1, E_2 a BC stb. oldalon van, a négyszög szögeit α, β, γ és δ-val.



A most bevezetett jelöléseket felhasználva az állítás a következő alakban írható:

$$\frac{AE_1}{E_1B}=\frac{DE_3}{E_3C}. \tag{1}$$

Ezt kell bizonyítanunk.

Nyilván az AE_1O, BE_2O, CE_3O, DE_4O szögek derékszögek, s ezért a négy kis négyszög mindegyikében a szemközti szögek összege 180°, pl. az E_4AE_1O négyszögben $E_4AE_1\sphericalangle+E_1OE_4\sphericalangle=180^\circ$. Mivel $ABCD$ húrnégyszög, az $E_4AE_1\sphericalangle=\alpha$ szöget a C csúcsnál levő γ szög is 180°-ra egészíti ki, amiből következik, hogy $E_1OE_4\sphericalangle=\gamma$.

Az AE_1OE_4 és OE_2CE_3 négyszög szögei megegyeznek, ebből azonban még nem következik, hogy hasonlók. Ellenben ha az átlókat meghúzzuk – mivel a négyszögek deltoidok – az így kapott szögek is egyenlők lesznek.

Ebből már következik, hogy a két négyszög hasonló, és így megfelelő oldalaik arányosak, azaz

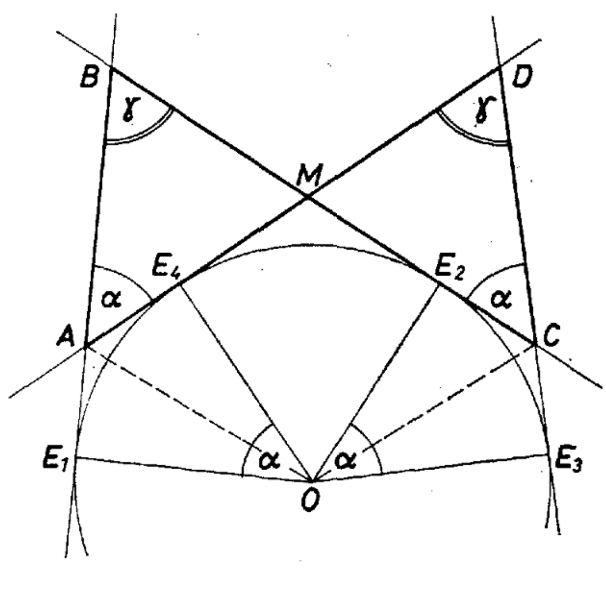
$$\frac{AE_1}{OE_2}=\frac{E_4O}{E_3C},$$

ahonnan $AE_1\cdot E_3C=E_4O\cdot OE_2$. Hasonlóan az E_1BE_2O és E_4OE_3D négyszögekben

$$\frac{E_1B}{E_4O}=\frac{OE_2}{DE_3},$$

ahonnan $E_1B\cdot DE_3=OE_2\cdot E_4O$. A két egyenlőségből $AE_1\cdot E_3C=E_1B\cdot DE_3$, amit átrendezve kapjuk az állítást.

Megjegyzés. A feladat szövege külön nem mondta ki, hogy a négyszög konvex. Ez azonban következik abból, hogy húrnégyszög, s így a négyszögnek nem lehet pontja egyetlen oldal meghosszabbításán sem. Az érintőnégyszög definíciójából viszont az következik, hogy az érintőkör az oldalakat és nem azok meghosszabbítását érinti. Ha az utóbbi esetet megengednénk, akkor úgynevezett hurkolt négyszöget kapnánk, amilyet az ábra mutat. Könnyen látható, hogy az ilyen esetekben a feladat állítása nyilvánvaló.



Mivel $ABCD$ feltétel szerint húrnégyszög, azaz írható köréje kör, $BAD\sphericalangle = BCD\sphericalangle = \alpha,\ ABC\sphericalangle = ADC\sphericalangle = \gamma$. Az AE_1O és CE_3O háromszögek egybevágók, $OE_1 = OE_3$, és a szögek egyenlősége miatt ezért $AE_1 = AE_4 = CE_3 = CE_2$. Jelöljük AD és BC metszéspontját M-mel. $ME_4 = ME_2$, s az előzőkből $MC = MA$ adódik. Az $ABCD$ négyszög tehát szimmetrikus trapéz, s így $BA = DC$. (1) tehát most is teljesül.