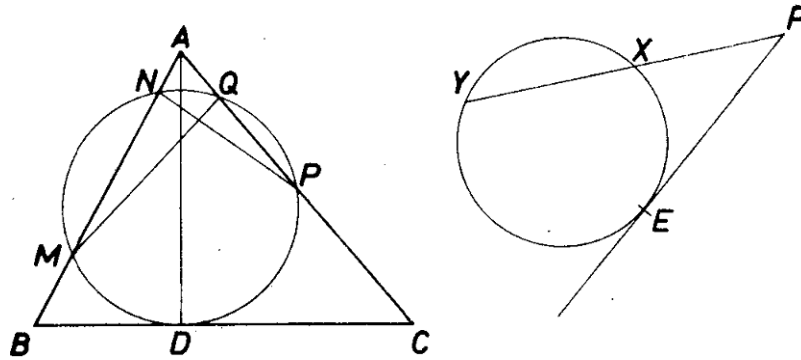


A bizonyításhoz felhasználjuk, hogy ha egy külső P pontból egy körhöz érintőt és szelőt húzunk, akkor az érintőszakasz hossza mértani középárányosa a szelődaraboknak, $PE^2 = PX \cdot PY$. (Lásd a II. o. tankönyv 175. oldal 240. feladat.)



Ezt alkalmazva először a B pontból kiinduló érintőre és szelőre $BD^2 = BM \cdot BN$. Mivel M, N az AB oldalra esik, kifejezhetjük két szakasz különbségeként

$$BD^2 = (AB - AM)(AB - AN) = AB^2 - AB(AN + AM) + AM \cdot AN.$$

Átrendezve és felhasználva az ADC háromszögben Pitagorász tételét:

$$(2) \quad AB(AM + AN) = AB^2 - BD^2 + AM \cdot AN = AD^2 + AM \cdot AN.$$

Az egyenlőség bal oldalán álló kifejezés megegyezik (1) bal oldalával, közös nevezőre hozás után.

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$CD^2 = CP \cdot CQ = (AC - AP)(AC - AQ) = AC^2 - AC(AP + AQ) + AP \cdot AQ.$$

$$(3) \quad AC(AP + AQ) = AC^2 - CD^2 - AP \cdot AQ = AD^2 + AP \cdot AQ.$$

Ennek bal oldala pedig (1) jobb oldalával egyenlő.

Már csak a (2) és (3) jobb oldalán álló kifejezések egyenlőségét kell belátnunk. Ehhez vegyük észre, hogy az APN és AQM háromszögek hasonlóak. Az A csúcsnál levő szögük közös, $\sphericalangle APN = \sphericalangle AMQ$ ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek. A hasonlóság miatt $AM : AP = AQ : AN$, ahonnan $AP \cdot AQ = AN \cdot AM$. Tehát az (1) egyenlőség valóban fennáll.