A bizonyítandó két azonosság épp a mondott

$$x = [x] + \{x\}$$

összefüggés miatt nem lehet egyszerre igaz, hiszen összegük szerint $3x$ egyenlő volna $(3x+1)$-gyel. A $+1$ a (2) összefüggés bal oldaláról maradt le, helyette a

$$\{3x\} + 1 = \{x\} + \left\{x + \frac{1}{3}\right\} + \left\{x + \frac{2}{3}\right\} \tag{2*}$$

összefüggést igazoljuk. Ezután (1)-et úgy kapjuk, hogy (2^*)-ot kivonjuk a

$$3x + 1 = 3x + 1$$

azonosságból.

Jelöljük $[3x]$ értékét k-val, $\{3x\}$-et h-val:

$$3x = k + h; \qquad 0 \le h < 1; \qquad k \text{ egész.} \tag{3}$$

Jelöljük még m-mel azt a maradékot, amit k 3-mal való osztásakor kapunk, és n legyen a hányados:

$$k = 3n + m; \qquad 0 \le m < 3; \qquad n,\ m \text{ egészek.} \tag{4}$$

Ezek szerint

$$x = n + \frac{m+h}{3},$$

és

$$\{x\} = \frac{m+h}{3}, \quad \left\{x + \frac{1}{3}\right\} = \frac{m_1+h}{3}, \quad \left\{x + \frac{2}{3}\right\} = \frac{m_2+h}{3},$$

ahol m_1, m_2 a $(k+1):3$, $(k+2):3$ osztások maradékai. Mivel három szomszédos számot 3-mal osztva mindig a 0, 1, 2 maradékot kapjuk valamilyen sorrendben, $m + m_1 + m_2 = 0 + 1 + 2 = 3$, és így valóban azt kapjuk, hogy

$$\{x\} + \left\{x + \frac{1}{3}\right\} + \left\{x + \frac{2}{3}\right\} = \frac{m + m_1 + m_2}{3} + h = 1 + h.$$