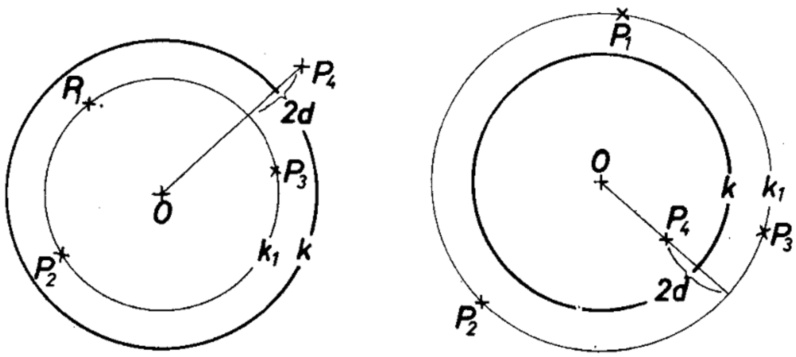
Jelöljük a pontokat P_1, P_2, P_3 és P_4-gyel, a feltételt kielégítő kört k-val, sugarát r-rel és a pontoktól való távolságát d-vel. A négy pont mindegyike nem lehet a k körön kívül, mert akkor k középpontjától való távolságuk $r+ +d$ lenne, ami azt jelentené, hogy a 4 pont egy körön van, ami ellentmond a feltételnek. Hasonlóképpen nem lehet a 4 pont mindegyike a k körön belül sem. A pontok tehát a k körhöz képest a következőképpen helyezkednek el: vagy 3 a k körön belül van és egy kívül (vagy fordítva), vagy 2 a körön belül, 2 pedig kívül van. Vizsgáljuk meg mindkét esetben a lehetséges megoldások számát.

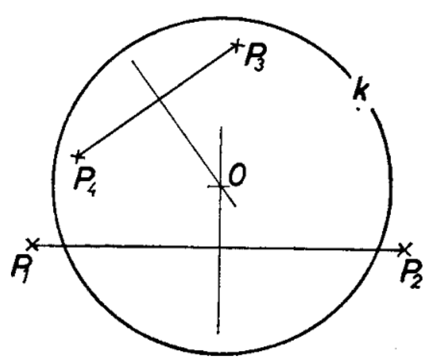
Először válasszunk ki 3 pontot, mivel ezek nincsenek egy egyenesen, meghatároznak egy k_1 kört, melynek sugara r_1. Ezután olyan kört kell szerkesztenünk, amelyik k_1-től is és a negyedik ponttól is egyenlő távolságra van. Ez nyilván egyközepű lesz k_1-gyel, és sugara r_1+d, ha P_4 a k_1-en kívül van (1. ábra), illetve r_1-d, ha P_4 k_1-en belül, ahol d fele akkora, mint P_4-nek a k_1 körtől való távolsága. Az így kapott k kör eleget tesz a feltételnek, hiszen mindegyik ponttól d távolságra van. Ily módon annyi megoldást kapunk, ahányféleképpen 4 pont közül ki tudunk választani 3-at. Ez 4 lehetőség.



1. ábra

Most vizsgáljuk azt az esetet, amikor két pont a keresett k körön kívül fekszik, legyen ez P_1, P_2 és kettő belül, P_3, P_4. P_1 és P_2-nek k-tól való távolsága most $r+d$, P_3 és P_4-nek $r-d$. Két ponton átmenő kör középpontja mindig rajta van a két pont által meghatározott szakasz felező merőlegesén, ha tehát meghúzzuk a két kiválasztott szakasz felező merőlegesét, ezek metszéspontja – amennyiben létrejön – megadja a k kör O középpontját, hiszen k most is egyközepű a P_1, P_2, ill. P_3, P_4 ponton átmenő körökkel, és sugara O-nak a szakaszok végpontjától vett távolságainak számtani közepe (2. ábra). A 4 pont összesen 3 különböző szakaszpárt határoz meg, a feladatnak így legfeljebb még 3 megoldását kapjuk. Ha a 4 pont paralelogrammát alkot, akkor csak 1 megoldás van – hacsak nem négyzet vagy téglalap, de ezt a feladat szövege kizárta –, mert a párhuzamos oldalak felező merőlegesei nem metszik egymást. Trapéz esetén 2 megoldást kapunk, kivéve ha a trapéz szimmetrikus, akkor a felező merőlegesek egybeesnek és végtelen sok megoldás van. De mivel a szimmetrikus trapéz köré írható kör, ezt az esetet is kizárja a feladat szövege.

Összesen tehát legfeljebb 7 megoldás lehetséges.



2. ábra

Mármarosi József (Kisbér, Táncsics M. Gimn., II. o. t.)