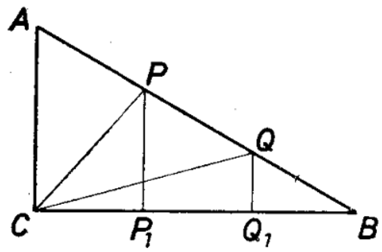
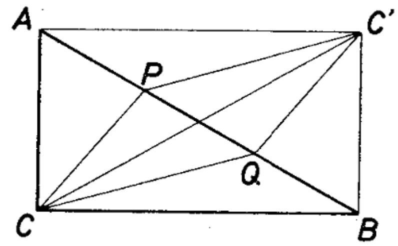
I. megoldás. A P és Q pontokon keresztül húzzunk párhuzamosokat az AC befogóval. Jelöljük a párhuzamosok talppontjait a CB-n rendre P_1, Q_1-gyel. Nyilván

$$PP_1 = \frac{2}{3}AC, \quad QQ_1 = \frac{1}{3}AC, \quad CP_1 = \frac{1}{3}CB, \quad CQ_1 = \frac{2}{3}CB.$$





A CP, ill. CQ távolságokat a CPP_1, ill. CQQ_1 háromszögekből Pitagorasz-tétel felhasználásával kapjuk:

$$CP^2 = CP_1^2 + PP_1^2 = \left(\frac{1}{3}CB\right)^2 + \left(\frac{2}{3}AC\right)^2,$$

ill.

$$CQ^2 = CQ_1^2 + QQ_1^2 = \left(\frac{2}{3}CB\right)^2 + \left(\frac{1}{3}AC\right)^2.$$

És mivel $PQ = \frac{1}{3}AB$, a keresett összeg

$$\left(\frac{1}{3}CB\right)^2 + \left(\frac{2}{3}AC\right)^2 + \left(\frac{2}{3}CB\right)^2 + \left(\frac{1}{3}AC\right)^2 + \left(\frac{1}{3}AB\right)^2 =$$
$$= \frac{5}{9}(AC^2 + CB^2) + \frac{1}{9}AB^2 = \frac{2}{3}AB^2,$$

hiszen $AC^2 + CB^2 = AB^2$.

II. megoldás. Tükrözzük a háromszöget az AB szakasz felezőpontjára. A tükrözéskor A és B pontok helyzete felcserélődik, C tükörképe C', és a tükrözésből következik, hogy $AC'BC$ négyszög téglalap. Továbbá $CPC'Q$ paralelogramma, hiszen átlói felezik egymást. Alkalmazzuk rá azt a kevésbé ismert tételt, mely szerint a paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével. (Az állítást pl. a Pitagorász-tétel felhasználásával igazolhatjuk.)

Eszerint

$$2CP^2 + 2CQ^2 = PQ^2 + CC'^2, \qquad \text{s mivel} \quad PQ = \frac{1}{3}AB \quad \text{és } CC' = AB,$$
$$CP^2 + CQ^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}AB\right)^2 + AB^2\right] = \frac{5}{9}AB^2,$$

amiből következik az állítás.