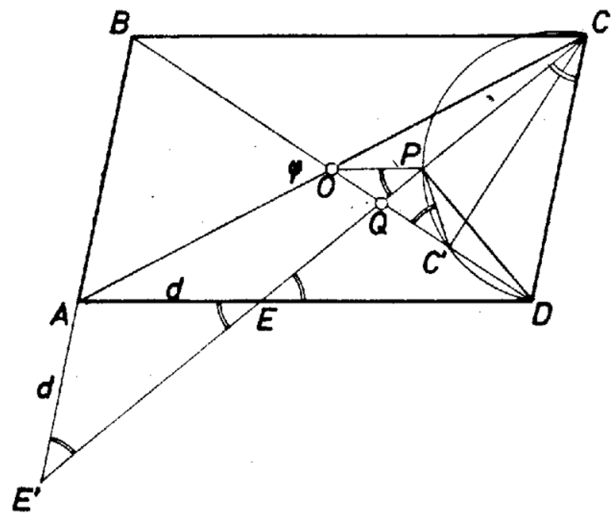
Válasszuk úgy a jelölést, hogy az $ABCD$ paralelogrammában $AD > DC$, az átlók által bezárt szög φ, $AD - DC = d > 0$, és legyen adva az AC átló. Jelöljük az átlók metszéspontját O-val.

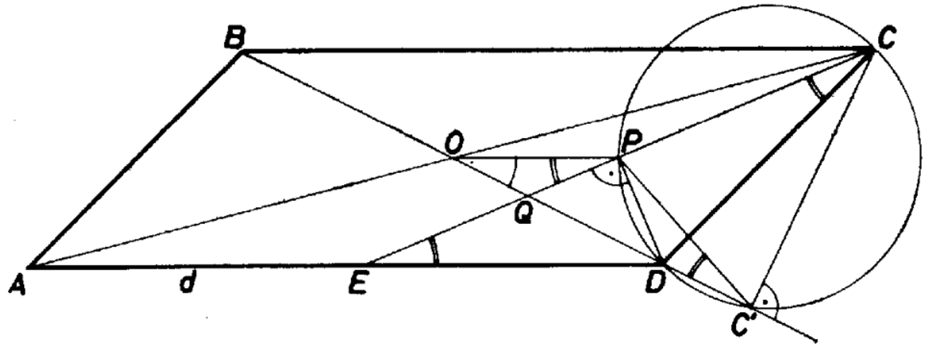


1. ábra

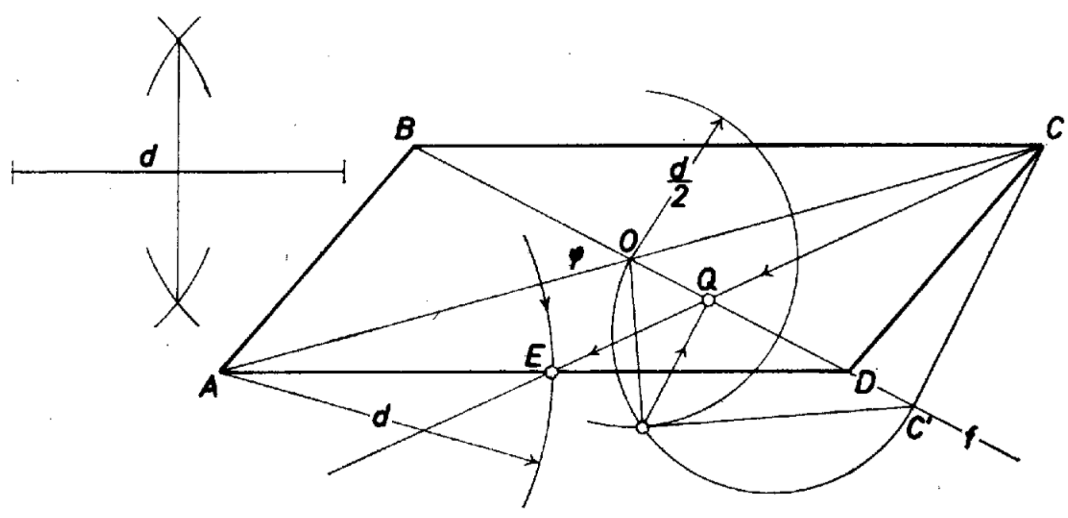
Mivel ismerjük az átlók hajlásszögét, meg tudjuk húzni a BD átló egyenesét is. Mérjük fel az AD oldalra a $DE = DC$ távolságot. A C, E pontokon átmenő egyenes messe a BD átló egyenesét a Q pontban. A CDE egyenlő szárú háromszögben húzzuk meg a CE oldalhoz tartozó magasságot, és jelöljük a talppontját P-vel. Mivel P felezi EC-t és O felezi AC-t, $OP \| AE$ és $OP = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}d$. Vetítsük a C pontot merőlegesen a BD-re, s jelöljük a vetületét C'-vel. A CDC' és CDP közös átfogójú derékszögű háromszögek, $PCDC'$ tehát húrnégyszög. Ha C' a CD' ugyanazon oldalára esik, mint P, akkor $PCD\sphericalangle + PC'D\sphericalangle = 180°$ (1. ábra), s ezért $PCD\sphericalangle = PC'O\sphericalangle$. Ha P és C' a CD szakasz ellenkező oldalán van (2. ábra), akkor $DCP\sphericalangle = DC'P\sphericalangle$ egyenlő húrhoz tartozó kerületi szögek. Továbbá $DCP\sphericalangle = DEP\sphericalangle = EPO\sphericalangle$. Mindkét esetben az OPC' és OPQ háromszögek hasonlók (két szögük egyenlő), és így

$$OP^2 = OQ \cdot OC'. \tag{1}$$

Az OP és OC' szakaszok hosszát ismerjük, s így OQ távolságot meg tudjuk szerkeszteni.



2. ábra



3. ábra

Ennek alapján a szerkesztést a következőképpen végezhetjük el (3. ábra).

Felvesszük az AC szakaszt, az O felezőpontján át meghúzzuk a BD átló f egyenesét, mely vele az adott φ szöget zárja be. A C pontot levetítjük f-re és OC' és $OP = \frac{1}{2}d$ ismeretében (1) felhasználásával megszerkesztjük az OQ távolságot. Majd A körül egy d sugarú kört rajzolunk. Ahol a kör metszi a CQ egyenest, ott kapjuk az E, ill. E' pontot. A körnek az egyenessel általában két metszéspontja lesz. Az ezeket A-val összekötő egyenesek metszik ki f-ből a paralelogramma hiányzó csúcsait, az 1. ábra szerinti AE' a B csúcsot, hiszen $ECD\sphericalangle = CED\sphericalangle = AEE'\sphericalangle = EE'A\sphericalangle$ miatt $E'A \| CD$. A szerkesztés menetéből következik, hogy az $ABCD$ paralelogramma eleget tesz a feltételnek.

A megoldhatóság feltétele, hogy az A körüli, d sugarú kör két különböző pontban messe az OQ egyenest. Nyilvánvaló továbbá, hogy a háromszög-egyenlőtlenség miatt az is szükséges, hogy $d < AC$ legyen. Bővebb diszkussziót nem végezhetünk.

Tekintsük végül az adathármasnak azt a különleges, esetét, ha $\varphi = 90^\circ$. Ekkor C' az O-ba esik, szerkesztésünk nem hajtható végre, de az átlók merőlegességéből tüstént következik, hogy a paralelogramma csak rombusz lehetne. Így $d = 0$ mellett a feladat határozatlan, $d > 0$ mellett pedig az adathármas ellentmondó. ($d = 0$-ból indulva viszont az következik, hogy csak $\varphi = 90^\circ$ lehet.)

A szerkesztés helyességét a következőképpen igazolhatjuk. Miután megszerkesztettük a CQ egyenest a fent leírt módon, s elmetszettük az A pont körüli d sugarú körrel, húzzunk párhuzamost az O ponton keresztül az AE-vel. A kapott P pont nyilván felezi az EC távolságot. A mértani közép tulajdonságából következik, hogy $OPQ\sphericalangle = PC'Q\sphericalangle$, valamint a párhuzamosság miatt $OPQ\sphericalangle = AEE'\sphericalangle$. P-ben állítsunk merőlegest EC-re, s messe ez az f-et D'-ben. ECD' háromszög egyenlő szárú, $ECD'\sphericalangle = CED'\sphericalangle$, továbbá $CPC'D'$ négyszög húrnégyszög, s ezért $PCD'\sphericalangle = PC'Q\sphericalangle$. Messe az AE egyenes az f egyenest D-ben, az $AEE'\sphericalangle = CED\sphericalangle$. S mivel CED' és CED szögek nagysága megegyezik és egyik száruk közös, kell hogy a D egybeessen D'-vel. Az $ABCD$ idom paralelogramma – hiszen $AE' \| CD$, s mivel O felezi AC-t, így kell hogy felezze BD-t is –, s eleget tesz az előírt feltételeknek.

Csordás András (Esztergom, Dobó K. Gimn.)