I. megoldás. Jelöljük általában $R_n(x)$-szel az

$$R_n(x)=x^{2n}-2x^{2n-1}+3x^{2n-2}-4x^{2n-3}+\ldots+2n+1 \tag{2}$$

összeget. Megmutatjuk, hogy ez minden rögzített x mellett n-ben monoton nő. Ebből következik a feladat állítása, hiszen

$$R_1(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2\geq 2,$$

tehát így (1) bal oldalának értéke minden valós x mellett legalább 2.

Állításunk igazolása érdekében vizsgáljuk meg a $Q_n(x)=R_n(x)-R_{n-1}(x)$ különbséget:

$$\begin{gathered}Q_n(x)=x^{2n}-2x^{2n-1}+3x^{2n-2}-4x^{2n-3}+5x^{2n-4}-6x^{2n-5}+\ldots+2n+1-\\-(x^{2n-2}-2x^{2n-3}+3x^{2n-4}-4x^{2n-5}+\ldots+2n-1)=\\=x^{2n}-2x^{2n-1}+2x^{2n-2}-2x^{2n-3}+2x^{2n-4}-2x^{2n-5}+\ldots+2.\end{gathered}$$

Megmutatjuk, hogy rögzített x mellett ez is monoton nő n-ben. Ebből már következik az állításunk, hiszen

$$Q_1(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1\geq 1.$$

Ismét a szomszédos tagok különbségét vizsgáljuk :

$$\begin{gathered}Q_n(x)-Q_{n-1}(x)=x^{2n}-2x^{2n-1}+2x^{2n-2}-2x^{2n-3}+\ldots+\\+2-(x^{2n-2}-2x^{2n-3}+\ldots+2)=\\=x^{2n}-2x^{2n-1}+x^{2n-2}=(x^n-x^{n-1})^2\geq 0.\end{gathered}$$

Állításainkat ezzel bebizonyítottuk.

Náray Zsófia (Budapest, I. István Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Az egyenlő kitevőjű hatványok különbségének ismert szorzattá alakítása alapján, ha $x\neq -1$

$$S_k(x)=(-x)^k+(-x)^{k-1}+\ldots+1=\frac{1-(-x)^{k+1}}{1+x}.$$

Ezt ismét felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{gathered}T_k(x)=S_k(x)+S_{k-1}(x)+\ldots+S_1(x)+1=\frac{1-(-x)^{k+1}}{1+x}+\\+\frac{1-(-x)^k}{1+x}+\ldots+\frac{1-(-x)^2}{1+x}+\frac{1-(-x)}{1+x}=\\=\frac{(k+1)-(-x)S_k(x)}{1+x}=\frac{(k+1)(1+x)-(-x)\left(1-(-x)^{k+1}\right)}{(1+x)^2}=\\=\frac{(k+1)+(k+2)x+(-x)^{k+2}}{(1+x)^2}.\end{gathered}$$

Mivel az $(S_k(x)+S_{k-1}(x)+\ldots+S_l(x)+1)$ összegben $(-x)^k$ csak egyszer szerepel, $(-x)^{k-1}$ kétszer, $(-x)^{k-2}$ háromszor, és így tovább, végül az 1 minden tagban szerepel, tehát $(k+1)$-szer fordul elő,

$$S_{2n}(x)=(-x)^{2n}+2(-x)^{2n-1}+3(-x)^{2n-2}+\ldots+2n+1=R_n(x).$$

Ez pedig nem negatív x mellett pozitív, hiszen páros k mellett az előbb kapott alak számlálója is, nevezője is pozitív. Tehát nem negatív x mellett (1) bal oldalán pozitív szám áll. Ámde negatív x mellett is pozitív ennek a kifejezésnek az értéke, hiszen ekkor az eredeti alak minden tagja pozitív. Tehát (1) bal oldalának az értéke minden valós x mellett pozitív.

Arató Miklós (Budapest, József A. Gimn., II. o. t.)