

Definíció szerint  $[u] = 2$  ekvivalens a  $2 \leq u < 3$  egyenlőtlenséggel, így (1) helyett a

$$(2) \quad 2 \leq \frac{1}{x} [x]^2 < 3$$

egyenlőtlenséget oldjuk meg. Nyilván csak pozitív  $x$ -re teljesülhet (2), hiszen  $[x]^2$  nem negatív. Ha már tudjuk, hogy  $x$  pozitív, szorozhatunk vele anélkül, hogy az egyenlőtlenség iránya megváltozna:

$$2x \leq [x]^2 < 3x.$$

Ismét  $x$  pozitív volta miatt gyököt is vonhatunk:

$$(3) \quad \sqrt{2x} \leq [x] < \sqrt{3x}$$

Mivel  $[x] \leq x$ , az első egyenlőtlenségből  $\sqrt{2x} \leq x$ ,  $2 \leq x$  következik. Mivel  $[x] > x - 1$ , a második egyenlőtlenségből

$$x - 1 < \sqrt{3x}$$

következik. Ez biztosan nem teljesül, ha  $x \geq 5$ , hiszen ekkor

$$3x \leq (x - 2)x < (x - 1)^2.$$

Így  $[x]$  értéke csak 2, 3 vagy 4 lehet. Mivel  $x \geq 2$  esetén  $\sqrt{2x} \geq 2$ , és egyenlőség csak  $x = 2$  mellett állhat, ha  $[x] = 2$ , (3) csak  $x = 2$  mellett teljesülhet. Ekkor  $\sqrt{3x} > 2$ , tehát ez valóban gyök.

Ha  $[x] = 3$ , (3) miatt  $\sqrt{3x} > 3$ ,  $x > 3$ , ami kizárja az  $x = 3$  értéket. Különben az egész  $3 < x < 4$  intervallum megfelelő, hiszen itt  $\sqrt{2x} < \sqrt{8} < 3$ , és  $\sqrt{3x} > 3$ . Végül  $[x] = 4$  már nem lehet, mert ez  $[x] < \sqrt{3x}$  miatt az  $x > \frac{16}{3}$  feltételre vezet. Tehát (1) megoldása az  $x = 2$  érték és a  $3 < x < 4$  intervallum.