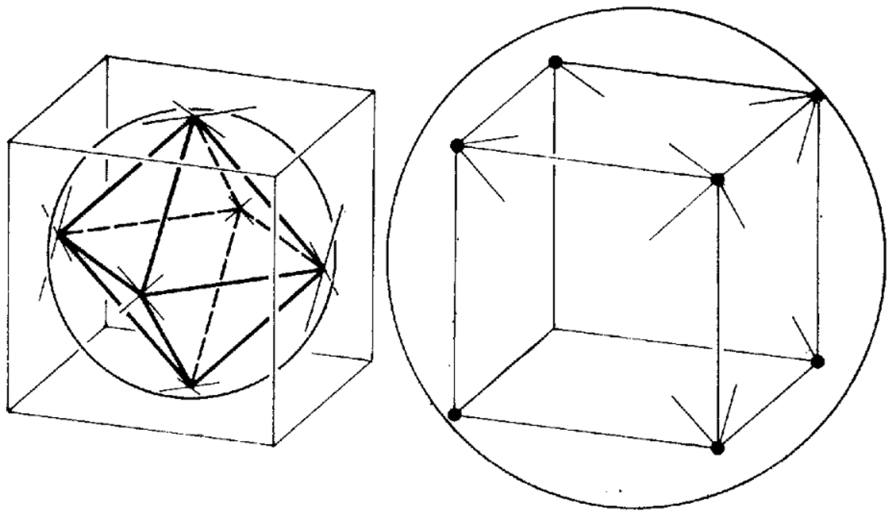
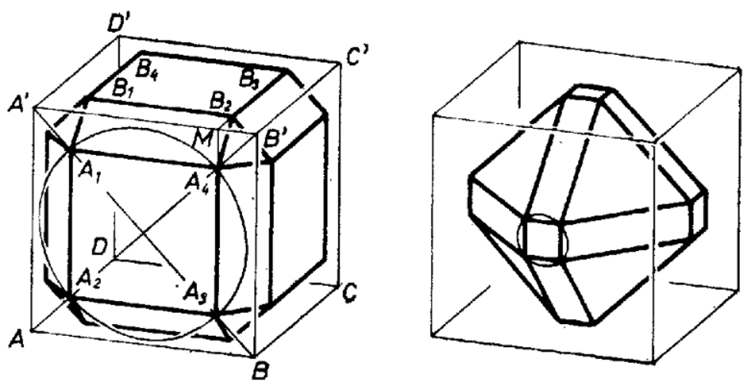
A legkisebb olyan gömb, amelynek van közös pontja a lapátlókkal az, amelyik éppen érinti a négyzeteket a lapközéppontjukban. Ennek a gömbnek a sugara $1/2$, és az így kapott konvex test az oktaéder, melyet 8 db szabályos háromszöglap határol.

A legnagyobb gömb, amelynek még van közös pontja a lapátlókkal, a kocka köré írt gömb. A metszéspontok az átlók végpontjai, azaz a kapott konvex test a kiindulási kocka. A gömb sugara a kocka testátlójának fele, $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor a gömb a lapátlókat két – a végpontjaiktól különböző – pontban metszi. Bármekkora is a gömb sugara, középpontja (mely egyben a kockának is középpontja) bármely lap középpontjától $1/2$ távolságra van. A kocka és a gömb szimmetriájából következik, hogy minden egyes lapon 4 metszéspont jön létre. Vizsgáljuk meg azt a konvex testet, amelyet a metszéspontok meghatároznak.



Jelölje A, B, C, D a kocka alaplapját pozitív forgási irány szerint felsorolva és A', B', C', D' rendre az A, B, C, D feletti csúcsokat. Az $ABB'A'$, ill. A', B', C', D' szomszédos lapokon a gömb által kimetszett négyzetek csúcsai A_1, A_2, A_3, A_4, ill. B_1, B_2, B_3, B_4 ugyancsak pozitív forgásirány szerint megadva úgy, hogy $A_1A_4 \parallel A'B'$, ill. $B_1B_2 \parallel A'B'$ és A_1, ill. B_1 közelebb van $A'B'$-hoz, mint A_2, ill. B_4.

A szimmetria miatt a B_2 pontnak a $C'B'B$ síktól való távolsága ugyanannyi, mint az A_4 ponté, azaz $B_2A_4 \parallel C'B'B$ síkkal. $B_1B_2 \parallel A'B' \parallel A_1A_4$, s mivel $A'B'$ merőleges $C'B'B$ síkra, így merőleges A_4B_2 egyenesre is, azaz az $A_1A_4B_2B_1$ négyszög általában téglalap. A konvex testet tehát 6 db négyzet, 12 db téglalap és 8 db háromszög határolja. Mivel a kocka testátlói körüli $120°$-os forgatás a kockát is, a gömböt is önmagába viszi át, ez utóbbiak szabályosak.

Feladatunkban annak a gömbnek a sugarát keressük, amellyel elmetszve a kockát, a téglalap oldalai egyenlők lesznek.

Jelöljük a feltételnek eleget tevő gömb sugarát r-rel, s fejezzük ki a kockalapon keletkezett négyzetek oldalát r függvényeként. A négyzet átlójának felére $\sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$ adódik, ahonnan a négyzet oldala

$$a = \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2r^2 - \frac{1}{2}}.$$

Ennyivel kell egyenlőnek lennie az A_4B_2 szakasznak is. Az A_4B_2 szakasz hosszát ugyancsak Pitagorász tétele segítségével határozhatjuk meg. Fektessünk az A_4B_2 egyenesre egy síkot, mely merőleges $A'B'$-re, s jelöljük az $A'B'$-vel való metszéspontját M-mel. Az A_4MB_2 egyenlő szárú derékszögű háromszögben

$$MB_2 = MA_4 \quad \text{és} \quad A_4B_2 = \sqrt{2} \cdot MB_2 = a,$$

ahonnan

$$MB_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

A B_2MA_4 sík a kocka fedőlapját a $B'C'$ éllel párhuzamos egyenesben metszi, így

$$a + 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = 1 \quad \text{és} \quad a = \sqrt{2r^2 - \frac{1}{2}}$$

összefüggések felhasználásával a

$$(\sqrt{2} + 1)\sqrt{2r^2 - \frac{1}{2}} = 1$$

egyenlethez jutunk. Innen mivel $r > 0$, ezért az $r = \sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{2}} = 0{,}579$ értéket kapjuk a keresett gömb sugarára.

Gát György (Esztergom, Dobó K. Gimn., II. o. t.)