Jelöljük $\sqrt{x}$-et z-vel, és alakítsuk át a szóban forgó két függvény különbségét.

$$D = z - \frac{6z^2+6}{z^2+11} = \frac{(z-1)(z-2)(z-3)}{z^2+11}.$$

Itt a nevező mindig nagyobb 10-nél, emiatt elég belátnunk, hogy a számláló abszolút értéke legfeljebb $1/2$. Ha $1 \le x \le 4$, akkor $1 \le z \le 2$, és a számlálóban

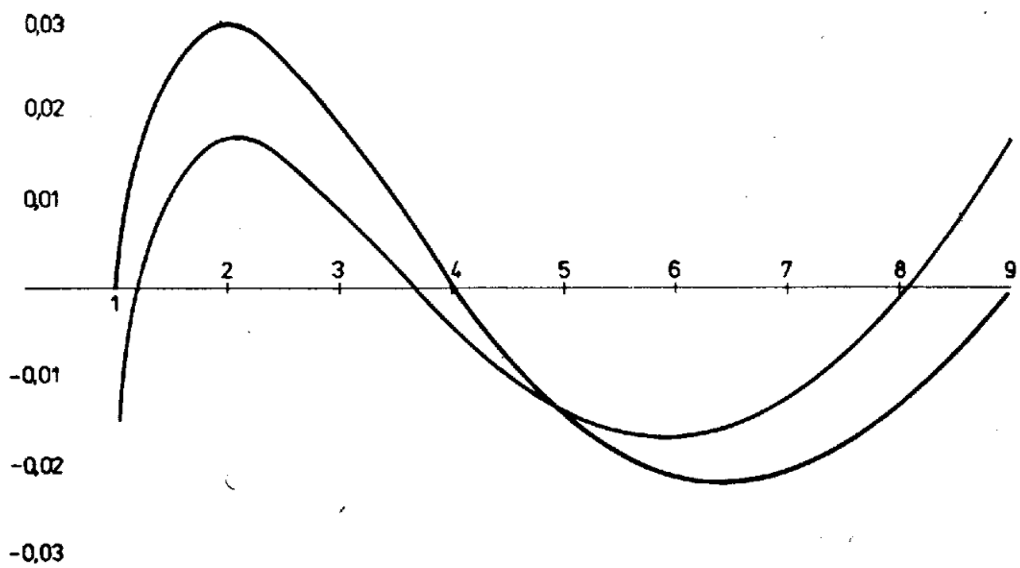
$$0 \le (z-1)(2-z) = \frac{1}{4} - \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}, \quad 0 < 3 - z \le 2,$$

tehát a számláló nem negatív, és értéke valóban legfeljebb $1/2$.

Ha pedig $4 \le x \le 9$, akkor $2 \le z \le 3$, és a számlálóban

$$0 < z - 1 \le 2, \quad 0 \le (z-2)(3-z) = \frac{1}{4} - \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4},$$

tehát most a számláló nem pozitív, és abszolút értéke ismét legfeljebb $1/2$.



Elek Gábor (Budapest, Eötvös J. Gimn., I. o. t.)

Megjegyzés. Az $(ax+b)/(cx+d)$ alakú függvények közül $\sqrt{x}$-et az $1 \le x \le 9$ intervallumban legjobban az $(5{,}868\,63\ldots x + 6{,}064\,58\ldots)/(x + 10{,}737\,27\ldots)$ közelíti meg, a két függvény eltérése kisebb, mint $0{,}0166\,95\ldots$. Ennek, valamint a feladatban megadott függvénynek $\sqrt{x}$-től való eltérését rajzoltuk fel az ábrán.

Az ilyen jellegű, ún. racionális törtfüggvénnyel való közelítések fontos feladatot töltenek be a számológépek programozásánál, így például a négyzetgyökvonás rutinjában (amit a zsebszámológépek esetében a gépbe „beégettek" vagy „behuzaloztak") a Newton–Raphson iteráció kezdőértékét (lásd ez évi májusi számunk 220. oldalán) ily módon számítják. S minél pontosabb a kezdőérték, annál kevesebb iterációs lépésre van szükség, sőt a szükséges iterációs lépések számát is meg lehet előre határozni, függetlenül az x értékétől.