A mondott tulajdonság ekvivalens azzal, hogy az

$$ax^2 + bx + c = x \tag{1}$$

egyenletnek az $a,\ b,\ c$ számok gyökei. Mivel egy másodfokú egyenletnek legfeljebb két különböző gyöke lehet, az $a,\ b,\ c$ számok között legalább kettő egyenlő egymással. Mivel (1.)-nek az a szám gyöke, azért

$$ab + c = a - a^3 = a(1 - a^2). \tag{2}$$

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor itt a két oldal értéke 0. Mivel kimondottan másodfokú egyenletet keresünk, $a \neq 0$, tehát most $a^2 = 1$.

Ha $a = 1$, akkor $b + c = 0$. Ha $b = c = 0$, ebből az x^2 polinomot kapjuk. Különben b és c nem lehetnek egyenlőek, tehát közülük az egyik egyenlő a-val. Így az $x^2 + x - 1$ és $x^2 - x + 1$ polinomokat kapjuk, de közülük csak az első megfelelő.

Ha $a = -1$, akkor (2) szerint $b = c$, és a polinom alakja $-x^2 + bx + b$, ami tetszőleges b mellett megfelelő.

Rátérünk annak az esetnek a vizsgálatára, amikor (2) két oldalának az értéke nem 0. Ekkor $b \neq c$, mert különben (1)-nek csak $b^2(a + 1) = 0$ esetén lehetne b a gyöke, de ekkor (2) bal oldalának az értéke 0 volna. Tehát a vagy b-vel, vagy c-vel egyenlő.

Ha $a = b$, akkor c csak $c^2 + c = 0$ esetén lehet gyöke (1)-nek. Így c értéke vagy -1 vagy 0. Az elsőt (2)-be helyettesítve visszajutunk a már megvizsgált $a^2 = 1$ esetre, a másodikból az

$$a^2 + a = 1 \tag{3}$$

egyenletet kapjuk, amelynek mindkét gyöke mellett $a(x^2 + x)$ megfelelő polinom.

Ha $a = c$, akkor (2) szerint $b = -a^2$. Ezt (1)-be helyettesítve ismét a már megvizsgált $a + 1 = 0$ esetre jutunk vissza. Tehát a keresett polinomok a következőek:

$$x^2, \qquad x^2 + x - 1, \qquad -x^2 + bx + b, \qquad ax^2 + ax,$$

ahol b tetszőleges, a pedig (3) valamelyik gyöke.