A középen álló különbség első tagját a és b kvadratikus közepének, a másodikat a és b mértani közepének nevezik. Jelöljük őket Q-val és M-mel

$$Q=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},\quad M=\sqrt{ab}.$$

Ezek is pozitívak, és

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=2(Q^2+M^2),$$
$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=2(Q^2-M^2).$$

Az utóbbi összefüggés miatt két pozitív szám kvadratikus és mértani közepe csak akkor egyenlő, ha maguk a számok egyenlőek, különben a kvadratikus közép a nagyobb közülük. Így $a=b$ esetén (1) minden tagja 0-val egyenlő. Megmutatjuk, hogy különben mindkét helyen az egyenlőtlenség jele érvényes.

Helyettesítsük a bizonyítandó egyenlőtlenségbe a Q, M mennyiségeket.

$$\frac{Q^2-M^2}{\sqrt{2(Q^2+M^2)}}<Q-M<2\,\frac{Q^2-M^2}{\sqrt{2(Q^2+M^2)}}.$$

Mivel most $Q>M$, ha minden tagot $(Q-M)$-mel osztunk, majd $\sqrt{Q^2+M^2}$-nel szorzunk, az egyenlőtlenség iránya nem változik meg.

(2) $$\frac{Q+M}{\sqrt2}<\sqrt{Q^2+M^2}<(Q+M)\sqrt2.$$

Mivel Q és M pozitív, vehetjük e tagok négyzeteit is.

$$\frac{Q^2+2QM+M^2}{2}<Q^2+M^2<2(Q^2+M^2+2QM).$$

Az első két tag különbsége $\frac{1}{2}(Q-M)^2$, ami valóban pozitív. A második két tag különbsége még a kettes szorzó nélkül is a pozitív $2QM$. Ezzel a feladat állításánál többet mondó

$$\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\sqrt{ab}\le\frac{(a-b)}{\sqrt2(a+b)}$$

egyenlőtlenséget is beláttuk.

Megjegyzés. Ha (2) első egyenlőtlenségét $\sqrt2$-vel osztjuk, a

$$\frac{Q+M}{2}<\sqrt{\frac{Q^2+M^2}{2}}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Eszerint különböző pozitív számok számtani közepe kisebb a kvadratikus közepüknél. Belátható a bizonyítandó egyenlőtlenség csupán ennek felhasználásával is.