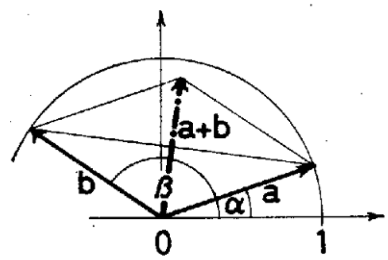
A feladat állítása csak akkor igaz, ha $|\alpha-\beta| \neq 180°$. Először e kiegészítő feltétel mellett bizonyítjuk állításunkat, majd megvizsgáljuk az $|\alpha-\beta| = 180°$ esetet.



Vegyük fel a koordinátarendszerben az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egységvektorokat, amelyeknek kezdőpontjuk az origó és irányszögük α, ill. β. Az egységvektorok koordinátái $\mathbf{a}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, $\mathbf{b}(\cos\beta,\ \sin\beta)$. Képezzük az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ összegvektort, a vektorok összeadási szabálya szerint az összegvektor az egységnyi oldalhosszúságú rombusznak az origóból kiinduló átlója, melynek koordinátái $(\cos\alpha+\cos\beta,\ \sin\alpha+\sin\beta)$.

Fordítva, ha ismerjük az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ vektor koordinátáit, akkor meg tudjuk szerkeszteni az összegvektort, és mivel a rombusz átlói merőlegesen felezik egymást, az $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$ hosszúságú szakasz felezőmerőlegese kimetszi az egységsugarú körből az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egységvektorok végpontjait, kivéve egy esetet, ha $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{0}$; erre még visszatérünk. Ez azt jelenti, hogy a $\sin\alpha+\sin\beta$ és $\cos\alpha+\cos\beta$ összefüggések egyértelműen meghatározzák az α-t és β-t, tehát (1) valóban csak úgy teljesülhet, ha $x=\alpha$ és $y=\beta$, vagy $x=\beta$ és $y=\alpha$.

Most térjünk vissza arra az esetre, amikor $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{0}$. Ez akkor áll fenn, ha $|\alpha-\beta|=180°$, s ekkor minden olyan x, y szögpár megoldás, amelyre $|x-y|=180°$.

Megjegyzések. 1. A feladatot meg lehet oldani trigonometrikus összefüggések felhasználásával is. A kiegészítő feltételre akkor is szükség van.

2. Többen észrevették, hogy az állítás így nem igaz, s erre ellenpéldát adtak. Az ő megoldásukat is helyesnek fogadtuk el.