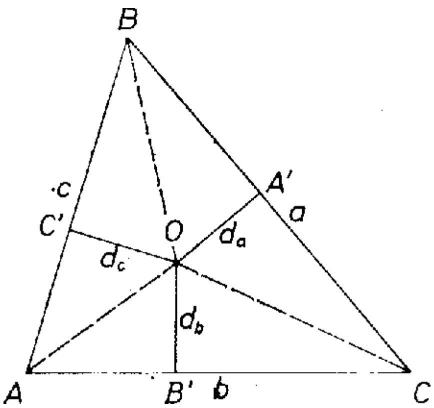
Jelöljük az ABC háromszög körülírt körének középpontját O-val, O-nak az a, b, c oldalaktól való távolságát rendre d_a, d_b, d_c-vel, a beírt kör sugarát r-rel. Választhatjuk a jelölést úgy, hogy $ab \geq c$ legyen.



Azt kell bizonyítani, hogy

$$d_a + d_b + d_c \geq 3r.$$

Írjuk fel az ABC háromszög területének, t-nek kétszeresét kétféleképpen:

$$2t = 2rs = r(a + b + c), \tag{1}$$

másrészt

$$2t = ad_a + bd_b + cd_c. \tag{2}$$

Ez utóbbi egyenlőség helyes, mivel a feltétel szerint a háromszög hegyesszögű, és így O a belsejében van.

A d_a, d_b, d_c szakaszoknak a megfelelő oldalakkal való metszéspontjait jelöljük A', B', C'-vel. Az OAB', COA', BOC' háromszögekből

$$d_b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = d_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = d_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = r^2,$$

s mivel $a \geq b \geq c$, innen $d_a \leq d_b \leq d_c$ adódik. Az $(a - b)\,(d_a - d_b)$ szorzat tehát biztosan negatív vagy 0. A szorzást elvégezve, s a másik két oldalra is felírva az egyenlőtlenségeket, kapjuk

$$\begin{aligned} ad_a + bd_b &\leq bd_a + ad_b, \\ bd_b + cd_c &\leq cd_b + bd_c, \\ ad_a + cd_c &\leq cd_a + ad_c. \end{aligned} \tag{3}$$

Az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadva és mindkét oldalhoz hozzáadva még (2) jobb oldalát

$$3(ad_a + bd_b + cd_c) \leq (a + b + c)\,(d_a + d_b + d_c).$$

(2) szerint a bal oldalon $6t$ áll, ami (1) szerint egyenlő $3r(a + b + c)$-vel, azaz

$$3r(a + b + c) \leq (a + b + c)\,(d_a + d_b + d_c).$$

Végigosztva az $(a + b + c) > 0$-val, éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.