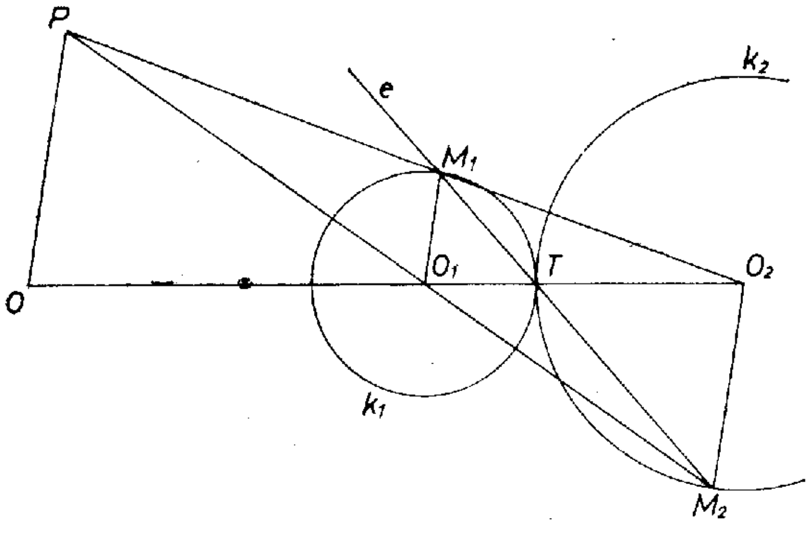
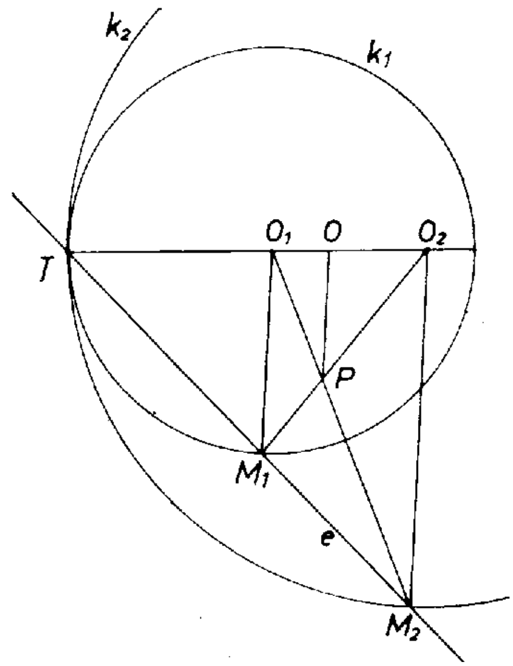
A feladatban a két kör szerepe azonos és sugaruk különböző, így feltehetjük, hogy például k_2 a nagyobb sugarú: $r_1 < r_2$.





Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor a körök kívülről érintik egymást. Ekkor M_1 és M_2 közrefogja T-t, és az 0_1M_1, 0_2M_2 sugarak ellentétes irányúak. Ha M_1 és M_2 közül az egyik az O_1O_2 egyenesen van, ott van a másik is, és P nem jön létre. Különben az $O_1M_1O_2M_2$ négyszög olyan trapéz, amelynek O_1M_2, M_1O_2 szárai nem párhuzamosak, hiszen a párhuzamos O_1M_1, M_2O_2 oldalak nem egyenlők. Mivel e két oldal közül az első a kisebb, a szárak O_1M_1-en túli meghosszabbításai metszik egymást, itt van a P pont. Jelöljük a P-n átmenő, O_1M_1-gyel párhuzamos egyenes O_1O_2-vel alkotott metszéspontját O-val, ez is O_1M_1-nek O_2M_2-vel átellenes oldalán van. Emiatt az $O_1O_2M_1$ és OO_2P háromszögek hasonlóak,

$$OP : O_1M_1 = OO_2 : O_1O_2 = O_2P : O_2M_1. \tag{1}$$

Ugyancsak hasonlók a PM_1O_1, PO_2M_2 háromszögek is, emiatt $PM_1 : PO_2 = r_1 : r_2$, tehát a fenti arányok közös értéke

$$O_2P : O_2M_1 = PO_2 : (PO_2 - PM_1) = r_2 : (r_2 - r_1). \tag{2}$$

Tehát egyrészt

$$OP = \frac{r_1r_2}{r_2 - r_1},$$

másrészt

$$OO_2 = \frac{(r_1 + r_2)r_2}{r_2 - r_1}.$$

Ezek miatt O helyzete nem függ e megválasztásától, és ugyancsak független ettől P és O távolsága. Ez azt jelenti, hogy P rajta van az O középpontú, $r = r_1r_2/(r_2 - r_1)$ sugarú körön. Megfordítva, ha P ennek a körnek nem az O_1O_2 egyenesen levő, de különben tetszőleges pontja, akkor az OP-vel megegyező irányú k_1-beli O_1M_1 és OP-vel ellentétes irányú k_2-beli O_2M_2 sugarak végpontjai által meghatározott M_1, M_2 pontra az $O_1O_2M_1$ és OO_2P, valamint a PM_1O_1 és PO_2M_2 háromszögek hasonlóak, hiszen két–két oldaluk párhuzamos, és ezek aránya egyenlő. Így M_1 a PO_2 és M_2 a PO_1 egyenesen vannak, és mivel O_1M_1, O_2M_2 ellentétes irányúak, M_1M_2 átmegy T-n. Az O középpontú, r sugarú körnek tehát tetszőleges, nem az O_1O_2 egyeneshez tartozó pontja a vizsgált mértani helyhez tartozik.

Rátérünk annak az esetnek vizsgálatára, amikor k_1 belülről érinti k_2-t (továbbra is feltesszük, hogy $r_1 < r_2$). Most O_1M_1 és O_2M_2 egyirányúak, emiatt P és az általa meghatározott O köztük van. Az $O_1O_2M_1$ és OO_2P háromszögek most is hasonlóak, tehát (1) érvényben marad, most viszont PM_1O_1 és PO_2M_2 az OP egyenes ellentétes oldalain vannak, hasonlóságukból tehát (2) helyett az következik, hogy

$$O_2P : O_2M_1 = O_2P : (O_2P + PM_1) = r_2 : (r_2 + r_1).$$

Emiatt most $r = OP = r_1r_2/(r_2 + r_1)$, $OO_2 = (r_2 - r_1)r_2/(r_2 + r_1)$, tehát P az így meghatározott O körüli r sugarú kör O_1O_2-vel alkotott metszéspontjaitól különböző pontjait járja be.

Juhász Imre (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., II. o. t.)