Írjuk át az (1) egyenlet tizedes törtjeit racionális tört alakba. Akkor az

$$\left(a+\frac{b}{9}\right)^2=c+\frac{7}{9} \tag{1a}$$

egyenlethez jutunk. A négyzetre emelést elvégezve és 9-cel szorozva a következő egyenletet kapjuk:

$$9a^2+2ab+\frac{b^2}{9}=9c+7. \tag{1b}$$

Mivel a és c pozitív egész, ezért a $\frac{b^2}{9}$-nek is egész számnak kell lennie, tehát b osztható hárommal. De b nem lehet sem 0, sem 9, mert akkor az (1) egyenlet bal oldalán egész szám állna, míg a jobb oldalon tört van. Így b csak 3 vagy 6 lehet. Vizsgáljuk meg ebben a két esetben a második feltételt is.

I. Ha $b=3$, akkor az (1b) egyenletbe helyettesítve és c-t kifejezve :

$$c=\frac{3a^2+2a-2}{3}$$

és

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{3a^2+5a-2}{3a^2-a-2}=\frac{(a+2)(3a-1)}{(a-1)(3a+2)}.$$

A $3a-1$ és a $3a+2$ különbsége 3, így közös osztójuk 3-nak is osztója. Másrészt $3a-1$ nem osztható 3-mal, így ezek relatív prímek. Tehát a (2) feltétel csak úgy teljesülhet, ha $3a+2$ osztója a nála kisebb $(a+2)$-nek, ami nem lehet. Összegezve : $b=3$ esetén nincs a feladat feltételeinek eleget tevő számhármas.

II. Ha $b=6$, akkor az (1b) egyenletbe helyettesítve és c-t kifejezve

$$c=\frac{3a^2+4a-1}{3}$$

és

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{3a^2+7a-1}{3a^2+a-1}=1+\frac{6a}{3a^2+a-1}.$$

Ahhoz, hogy ez egész szám legyen, szükséges, hogy

$$6a \geqq 3a^2+a-1$$

legyen, amiből a

$$3a^2-5a-1 \leqq 0$$

másodfokú egyenlőtlenséget kapjuk, amelynek megoldása:

$$\frac{5-\sqrt{37}}{6} \leqq a \leqq \frac{5+\sqrt{37}}{6}.$$

Ebbe az intervallumba egyetlen pozitív egész szám esik, az 1. Ha $a=1$, $b=6$, akkor $c=2$, és ez a számhármas az egyetlen, amelyik a feladat minden követelményének eleget tesz.