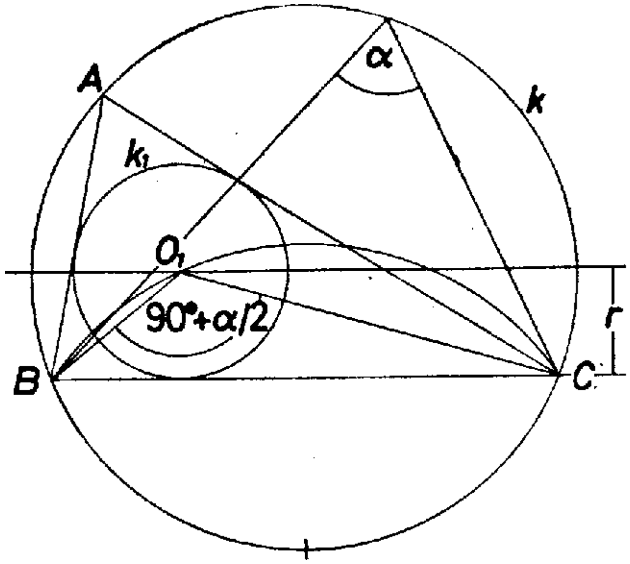
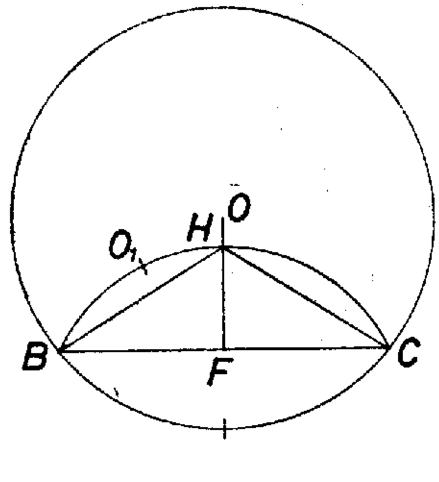
I. megoldás. Jelöljük a körülírt k kör sugarát R-rel, a beírt k_1 kör sugarát r-rel, és az adott szöget α-val. A szerkesztés során felhasználjuk, hogy R és α egyértelműen meghatározza a háromszög a oldalát.





Vegyük fel a k kört, rajzoljuk bele az α szöget, ezzel megkaptuk a keresett háromszög B és C csúcsát. A k_1 kör r sugara ismeretében keressük középpontjának mértani helyét. Ez egyrészt a BC egyenestől r távolságban húzott párhuzamos egyenesen, másrészt a BC szakasz fölé írt $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ szögi látóköríven van. A BC szakasz a k kört két részre osztja, α a két körív valamelyikéhez tartozik, aszerint, hogy hegyesszög vagy tompaszög. A beírt kör középpontját a BC szakasz ugyanazon oldalán kell keresnünk, amelyiken az α is fekszik. A két mértani hely közös pontja (amennyiben létezik) megadja k_1 középpontját. Megrajzoljuk k_1-et, majd B és C pontokból érintőt szerkesztünk k_1-hez, ezek metszik ki k-ból az A csúcsot.

Az így kapott háromszög nyilván eleget tesz a feltételnek, csupán azt kell belátnunk, hogy az érintők metszéspontja rajta van a k körön. Jelöljük a k_1 kör középpontját O_1-gyel. BO_1 és CO_1 az ABC háromszögben szögfelezők, így

$$BAC\sphericalangle = 180^\circ - (ABC\sphericalangle + ACB\sphericalangle) = 180^\circ - 2(O_1BC\sphericalangle + O_1CB\sphericalangle) = 180^\circ -$$
$$-2\left(180^\circ - \left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\right) = \alpha.$$

Tehát C valóban a BC szakaszhoz és α szöghöz tartozó látóköríven van.

Ha a feladatnak van megoldása, akkor általában kettő van, s ezek a BC felezőmerőlegesre szimmetrikusak. Egy megoldás van, ha a látókörív éppen érinti a párhuzamost, és nincs megoldás, ha nincs közös pontjuk.

Vizsgáljuk meg a megoldhatóság feltételét. Nyilván $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ és $R \geqq 2r$ mellett jöhet létre csak háromszög. Jelöljük BC felezőpontját F-vel, a k középpontját O-val, OF-nek a látókörívvel való metszéspontját H-val.

Ekkor

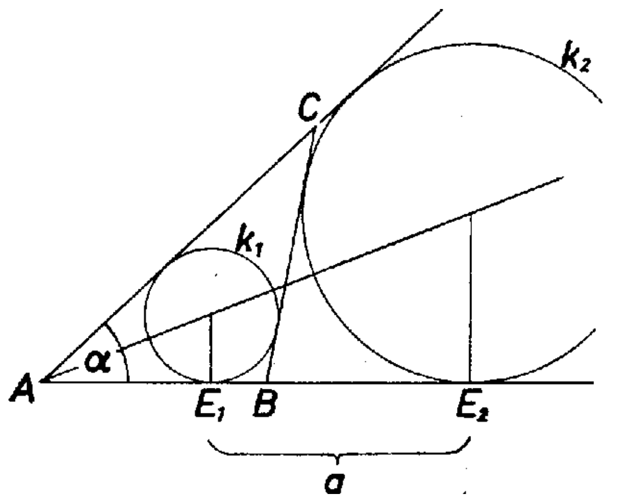
$$FC = \frac{BC}{2} = R \sin\alpha,$$
$$FH = \frac{BC}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{4}\right)$$

és mivel $r \leqq FH \leqq R \sin\alpha \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{4}\right) = 2\mathrm{R} \sin\frac{\alpha}{2}\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

II. megoldás. Induljunk ki az α szögből, és szárai közé szerkesszük meg az r sugarú k_1 beírt kört. Mivel az α-val szemközti oldal hossza a k körülírt kör R sugarával adott, ehhez a körhöz kell adott hosszúságú érintőt szerkeszteni.

Gondoljuk a feladatot megoldottnak, és rajzoljuk meg a BC oldal külső érintő körét, k_2-t. Érintse az AB egyenest a k_1 kör E_1-ben, a k_2 az E_2-ben. Ismeretes, hogy $AE_2 = s$ (ahol s a háromszög félkerülete) $AE_1 = (s - a)$, ahonnan

$$AE_2 - AE_1 = s - (s - a) = a.$$



A szerkesztést ezután úgy végezhetjük el, hogy az E_1 ponttól továbbhaladva az AE_1 félegyenesen felmérjük az $E_1E_2 = a$ távolságot. Megrajzoljuk az E_2-ben érintő k_2 kört, majd k_1, k_2 körökhöz közös belső érintőt szerkesztünk. A feladat megoldásainak száma 2, 1 vagy 0, aszerint, hogy a k_1, k_2 köröknek nincs közös pontjuk, érintik egymást, vagy két közös pontjuk van.

Könnyű belátni, hogy az így kapott háromszög eleget tesz a feltételnek.