(1) $$\sin\ \alpha+\sin\beta+\sin\gamma>2.$$

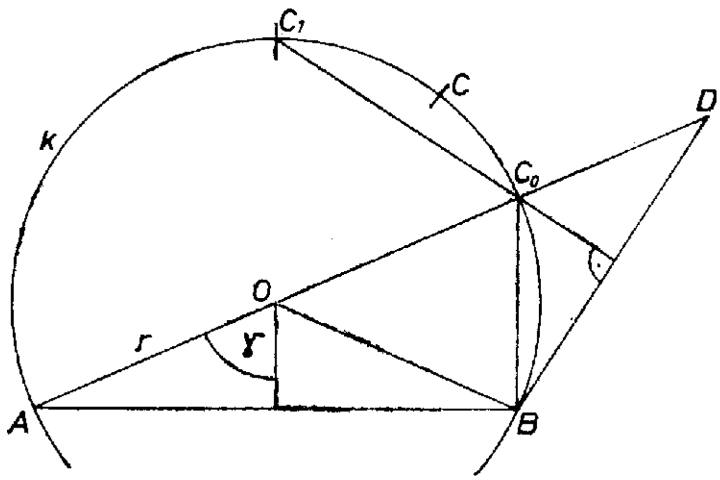
Tegyük fel, hogy az ABC háromszögben $AC \geq BC$, és jelöljük a háromszög köré írható kört k-val, sugarát r-rel. Ismeretes, hogy

$$\overline{AB}=2r\sin\gamma,\quad \overline{BC}=2r\sin\alpha,$$
$$\overline{CA}=2r\sin\beta$$

így (1) ekvivalens azzal, hogy

(2) $$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}>4r.$$

Jelöljük k-nak A-val átellenes pontját C_0-lal, és az ABC_0 háromszög C_0-beli külső szögfelezőjének k-val alkotott második metszéspontját C_1-gyel.



C_1 felezi a nagyobbik AB ívet, és feltevéseink szerint C a C_0C_1 íven van. Mivel a C_0C_1 egyenes külső szögfelező, B-t C_0C_1-re tükrözve az AC_0 egyenes C_0-on túli meghosszabbításán levő pontot kapunk, jelöljük ezt D-vel. Az egész C_0C_1 ív a BD szakasz C_0C_1 felező merőleges egyenesének D-t tartalmazó oldalán van, ezért $\overline{BC} \geq \overline{DC}$. Az ACD háromszögben $\overline{AC}+\overline{CD}>\overline{AD}$, az ABC_0 háromszögben pedig $\overline{AB}+\overline{BC_0} \geq \overline{AC_0}$. Ezek alapján

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA} \geq \overline{AB}+\overline{DC}+\overline{CA}>\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BC_0}+\overline{AC_0}>2\overline{AC_0}=4r,$$

amint azt bizonyítani akartuk.

Megjegyzés. Belátható, hogy a $0<x<\pi$ szakaszon $\dfrac{\sin x}{x}$ az x monoton fogyó függvénye. Emiatt esetünkben a $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$, $\dfrac{\sin\beta}{\beta}$, $\dfrac{\sin\gamma}{\gamma}$ hányadosok mindegyike nagyobb $\dfrac{\sin\pi/2}{\pi/2}=\dfrac{2}{\pi}$-nél és így $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma>(\alpha+\beta+\gamma)\dfrac{2}{\pi}=2.$