A $\sqrt[3]{x}$ és a $\sqrt[3]{y}$ összegéről tudjuk, hogy racionális (ti. egyenlő 1-gyel). Ha sikerülne megmutatnunk, hogy különbségük is racionális, azzal a feladat állítását is igazolnánk, hiszen racionális számok összege, különbsége, valamint racionális szám fele is racionális.

Vizsgáljuk tehát a $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x}$ különbséget. Az $u^3-v^3=(u-v)(u^2+uv+v^2)$ összefüggés alapján

$$\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}.$$

Itt a nevező sohasem lehet nulla (miért?), másrészt tudjuk, hogy a számláló racionális, elegendő igazolni, hogy a nevező is az. Ezt két lépésben látjuk be.

1. $\sqrt[3]{xy}$ racionális: az $(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$ összefüggés alapján

$$1=(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})^3=x+y+3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})=x+y+3\sqrt[3]{xy},$$

ahonnan azonnal látszik az állítás.

2. $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}$ racionális:

$$1=(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})^2=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+2\sqrt[3]{xy},$$

amiből a $\sqrt[3]{xy}$ racionalitása miatt az állítás következik. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Orova Edit (Tata, Eötvös J. Gimn., I. o. t.)