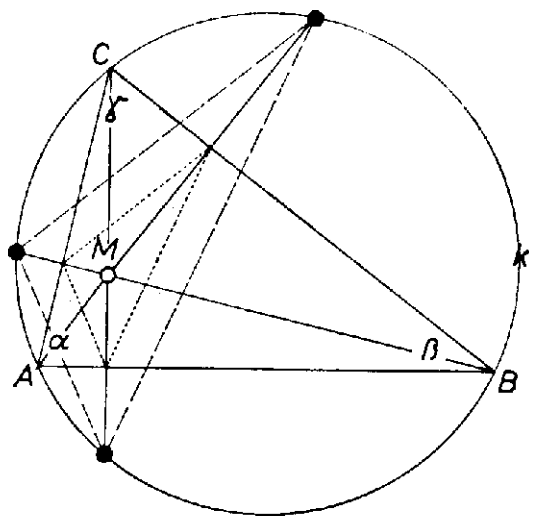
Jelöljük a háromszög csúcsait A, B, C-vel, szögeit α, β, γ-val, magasságpontját M-mel, körülírt körét k-val, és válasszuk egységnek k sugarát.



Ekkor a háromszög félkerülete, mint ismeretes

$$s = \sin\ \alpha + \sin\ \beta + \sin\ \gamma.$$

Az is ismert, hogy M-nek az oldalakra vonatkozó tükörképei k-n vannak, tehát ennek a háromszögnek is a szögei szinuszának az összege a fél kerülete:

$$s_M = \sin\ \alpha_M + \sin\ \beta_M + \sin\ \gamma_M,$$

ahol az M index a magasságpontra utal. Ha a háromszög hegyesszögű, akkor

$$\alpha_M = 180^\circ - 2\alpha, \qquad \beta_M = 180^\circ - 2\beta, \qquad \gamma_M = 180^\circ - 2\gamma,$$

ha pedig mondjuk C-nél tompaszög van, akkor

$$\alpha_M = 2\alpha, \qquad \beta_M = 2\beta, \qquad \gamma_M = 2\gamma - 180^\circ.$$

Így tehát mindkét esetben

$$s_M = |\sin\ 2\alpha| + |\sin\ 2\beta| + |\sin\ 2\gamma|,$$

ami akkor is helyes, ha a háromszög derékszögű. Azt kell megvizsgálnunk, hogy következik-e az $s_M = s$ feltétellel ekvivalens

(1) $$\sin\ \alpha + \sin\ \beta + \sin\ \gamma = |\sin\ 2\alpha| + |\sin\ 2\beta| + |\sin\ 2\gamma|$$

feltételből az, hogy $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$?

Ha a háromszög hegyesszögű, akkor igen, hiszen

(2) $$\begin{aligned} \sin\ 2\alpha + \sin\ 2\beta &\geqq 2\sin\ (\alpha+\beta),\\ \sin\ 2\beta + \sin\ 2\gamma &\geqq 2\sin\ (\beta+\gamma),\\ \sin\ 2\gamma + \sin\ 2\alpha &\geqq 2\sin\ (\gamma+\alpha) \end{aligned}$$

miatt mindig igaz, hogy ha $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, akkor

$$\sin\ 2\alpha + \sin\ 2\beta + \sin\ 2\gamma \geqq \sin\ \alpha + \sin\ \beta + \sin\ \gamma,$$

és az egyenlőség pozitív α, β, γ-ra csak $\alpha = \beta = \gamma$ mellett állhat fenn.

Ha viszont találunk (1)-nek olyan megoldását, melyben mondjuk $\gamma > 90^\circ$, akkor a feladat állítása nyilván nem igaz. Olyan α, β szögeket keresünk tehát, amelyek pozitívak, összegük kisebb, mint 90°, és teljesül rájuk, hogy

(3) $$\sin\ \alpha + \sin\ \beta + \sin\ (\alpha+\beta) = \sin\ 2\alpha + \sin\ 2\beta + \sin\ (2\alpha + 2\beta).$$

Használjuk fel a

(4) $$\sin\ 2\alpha + \sin\ 2\beta = 2\sin\ (\alpha+\beta)\cos\ (\alpha-\beta)$$

összefüggést [amiből (2) is következik]:

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin(\alpha+\beta)= \\ =2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(2\alpha+2\beta). \tag{5}$$

Rögzített $(\alpha+\beta)$ mellett ez a $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ ismeretlenre másodfokú egyenlet. Ha találunk olyan $(\alpha+\beta)$ értéket, amely mellett (5)-nek $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$-re van 1 és $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ közti gyöke, megvan az ellenpélda. Nézzük meg a két oldal különbségét ezeken a helyeken. Ha $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ helyére 1-et írunk, a jobb és bal oldal különbsége

$$\sin(2\alpha+2\beta)+\sin(\alpha+\beta)-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

ha pedig $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$-t írunk a helyére, a különbség

$$2\big(\sin(2\alpha+2\beta)-\sin(\alpha+\beta)\big).$$

Ha $\alpha+\beta=60^\circ$, ez utóbbi éppen 0, ha pedig $\alpha+\beta>60^\circ$, akkor negatív. Az első különbség $\alpha+\beta=60^\circ$ mellett pozitív, ha tehát $\alpha+\beta$ kicsit túllépi a 60°-ot, a két különbség ellenkező előjelű: az első pozitív, a második negatív. (Könnyen látható, hogy például $\alpha+\beta=70^\circ$ megfelel.)

A feladat állítása tehát nem igaz.

Megjegyzés. Ha (5)-be az $\alpha-\beta=0$ értéket helyettesítjük, $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$-re harmadfokú egyenletet kapunk. A megoldók többsége erről látta be, hogy van gyöke. Ehhez az ún. Bolzano-tételt kellett használniuk, mely szerint, ha egy zárt intervallumban folytonos függvény az intervallum elején pozitív, a végén negatív, akkor valahol az intervallum belsejében 0-val egyenlő. Nekünk ezt csak másodfokú függvényre kellett felhasználnunk, ami a függvény ismert menetéből (és a másodfokú egyenlet megoldóképletéből) következik.