Elegendő bizonyítanunk, hogy tetszőleges k^2 négyzetszámhoz található olyan m természetes szám, hogy

$$E(m+\sqrt{m}) \leqq k^2-1 \qquad \text{és} \qquad E(m+1+\sqrt{m+1}) \geqq k^2+1. \tag{1}$$

Emiatt ugyanis, ha m-nél kisebb n számot veszünk, akkor $E(n+\sqrt{n})$ értéke legfeljebb $E(m+\sqrt{m})$ lehet, ha viszont n nagyobb m-nél, akkor $E(n+\sqrt{n})$ értéke legalább $E(m+1+\sqrt{m+1})$. Tehát valóban semmilyen n értékre nem kaphatunk $E(n)$-re k^2-et.

(1)-nek eleget tevő m keresése közben az $m=k^2-k$-t sejtjük meg. Valóban, (1) első egyenlőtlensége kicsit más alakban

$$k^2-k+\sqrt{k^2-k}<(k^2-1)+\frac{1}{2}, \qquad \text{azaz} \qquad k^2-k<k^2-k+\frac{1}{4},$$

míg a második egyenlőtlenség

$$k^2-k+1+\sqrt{k^2-k+1}>(k^2+1)-\frac{1}{2}, \qquad \text{azaz} \qquad k^2-k+1>k^2-k+\frac{1}{4},$$

tehát mindkettő igaz. Ezzel a feladat állítását beláttuk.