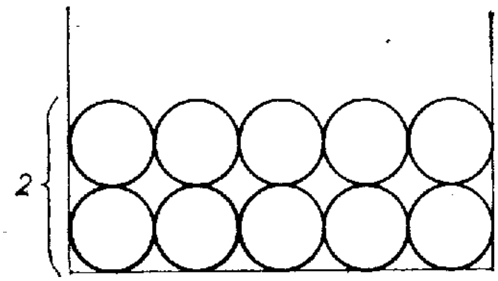
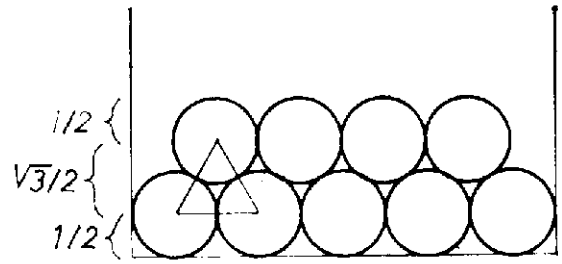
Az első sorba helyezzük el a köröket úgy, hogy azok a négyzet oldalát és egymást is érintsék (1. ábra). Így egy sorba pontosan n kört rakhatunk le. Ha a következő sort ugyanilyen módon folytatjuk, akkor n^2 darab kör helyezhető el az n oldalú négyzetben.





Próbálkozzunk másféle elrendezéssel! (2. ábra) A második sorba helyezzük el a körlemezeket úgy, hogy azok másik két kör „közé” kerüljenek. Így a második sorba csak $n-1$ db kör került, de a két sor által elfedett magasság csökkent. Számítsuk ki a magasságcsökkenést! Három nem egymás mellett levő kör középpontja egy egységnyi oldalú szabályos háromszög 3 csúcsa, melynek magassága $\sqrt{3}/2$. Ez adja a két kör középpontnívó távolságát. A magasságcsökkenés tehát

$$2-\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

Kérdés, milyen n mellett növekszik ez a sávszélesség akkorára, hogy elférjen benne még egy sor? n sor elhelyezésekor $n-1$ sorban nyerhetünk a magasságon, azaz az $(n-1)\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Ahonnan

$$n\geq 2(2+\sqrt{3})\approx 7{,}464.$$

Ez $n=8$ esetén már teljesül, s ekkor a 9 sorban összesen elhelyezett körök száma

$$5\cdot 8+4\cdot 7=68>64=n^2.$$

A feladat kérdésére tehát a válaszunk: igen.

Megjegyzések. 1. A megoldók egy része megelégedett azzal a válasszal, hogy elég nagy n választása esetén elérhető a kívánt elhelyezés, de nem adta meg az n értékét. (Ezeket elfogadtuk teljes megoldásnak.) Akadt a megoldók között olyan is, aki csak az első ábra szerinti elrendezést tudta elképzelni, s ebből kiindulva nemleges választ adott. (Ez persze hibás megoldás.)

2. Érdekes kérdésnek látszik, hogy a megoldásunkban talált 8 a legkisebb megfelelő szám-e. Azt kellene ehhez megvizsgálni, hogy be lehet-e tenni egy 7 cm oldalú négyzetbe (álfedés nélkül) 50 egységnyi átmérőjű kört, vagy sem. Nevezetes tétele a matematika diszkrét geometria nevű ágának, hogy a megoldásunkban használt elhelyezés valamilyen meghatározott értelemben a legsűrűbb, ebből azonban önmagában még nem következik, hogy esetünkben is ez szolgáltatja a minimumot.

3. Hasonló problémával foglalkoztunk már lapunk 40. kötetének 4. számában (145. oldal). Az ott szereplő 1631-es feladatban többek között azt vizsgáltuk, hogy a négyzetbe ily módon elhelyezett körök a négyzet területének hány %-át fedik le.