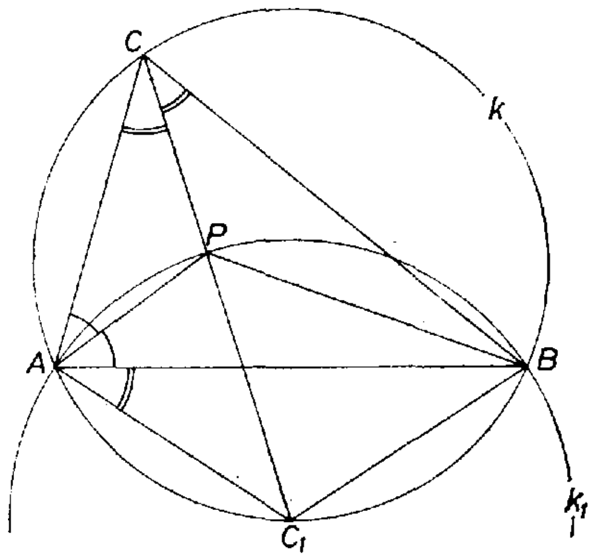
Legyen ABC tetszőleges háromszög, melynek k a körülírt köre és P a beírt kör középpontja. Jelöljük a CP egyenes k-val alkotott második metszéspontját C_1-gyel.



Ismeretes, hogy C_1 felezi az őt tartalmazó AB ívet, és így $AC_1 = BC_1$. Az ACP háromszögnek APC_1 külső szöge, tehát

$$APC_1\sphericalangle = PAC\sphericalangle + PCA\sphericalangle. \tag{1}$$

Mivel PA, PC felezi az ABC háromszög A-nál, C-nél levő szögeit, $PAC\sphericalangle = PAB\sphericalangle$, $PCA\sphericalangle = PCB\sphericalangle$. Ez utóbbi viszont a kerületi szögek tétele miatt egyenlő a BAC_1 szöggel. Ezek szerint

$$PAC\sphericalangle = PAB\sphericalangle, \quad PCA\sphericalangle = BAC_1\sphericalangle, \tag{2}$$

és így $APC_1\sphericalangle = PAC_1\sphericalangle$, vagyis az APC_1 háromszögben $AC_1 = PC_1$. Tehát a C_1 középpontú, A-n, B-n átmenő k_1 kör átmegy P-n.

Ezek alapján a szerkesztés menete a következő. Legyen C a k kör tetszőleges pontja, C_1 a CP egyenes k-val alkotott második metszéspontja, és A, B a C_1 középpontú, P-n átmenő k_1 kör k-val alkotott metszéspontjai. Amiatt, hogy P a k belső pontja, a mondott metszéspontok valóban léteznek. Mivel $AC_1 = BC_1$, PC az ABC háromszög belső szögfelezője. P az AB-nek ugyanazon az oldalán van, mint C, hiszen ott van k_1-nek P-n átmenő AB íve is. Így P az ABC háromszög belső pontja. Elég megmutatnunk, hogy PA felezi a háromszög A-nál levő szögét, hiszen így már két szögfelezőről fogjuk tudni, hogy átmegy P-n, tehát beláttuk, hogy az ABC háromszögnek megvannak a kívánt tulajdonságai. Mivel most tudjuk, hogy APC_1 egyenlőszárú, és továbbra is fennáll (1), elég a (2) alatti egyenlőségek közül az egyiket belátni, abból már következik a másik. A kerületi szögek tétele miatt $BAC_1\sphericalangle = BCC_1\sphericalangle$ és azt már tudjuk, hogy CC_1 szögfelező, tehát $BCC_1\sphericalangle = C_1CA\sphericalangle$, ami viszont azonos a PCA szöggel. A megszerkesztett háromszög tehát valóban megfelelő.

Megjegyzés. Többet láttunk be, mint kellett, hiszen a C csúcsot is tetszőlegesen vettük fel. Ha PC átmérő k-ban, ABC egyenlőszárú lesz, és általában C megválasztásával meghatározhatjuk az ABC háromszög alakját. Meglepő tétele Eulernek, hogy viszont az ABC-be írt kör sugara nem függ C megválasztásától. Javasoljuk az olvasónak, próbálja meg belátni ezt a nevezetes állítást. Mi például a 43. kötetünk 198–199. oldalain közöltünk rá két bizonyítást, közülük a második azonos a Kürschák–Hajós–Neukomm–Surányi: Matematikai versenytételek I. 3. kiadás 40. oldalán találhatóval.