A megadott számjegysorozat alkossa az n-jegyű S természetes számot. Az, hogy van olyan négyzetszám, ami ezzel a számjegysorozattal kezdődik, pontosan azt jelenti, hogy vannak olyan k és N természetes számok, amikre

$$S \cdot 10^k \le N^2 < (S+1) \cdot 10^k \tag{1}$$

vagyis

$$\sqrt{S \cdot 10^k} \le N < \sqrt{(S+1) \cdot 10^k}. \tag{2}$$

Itt azt öntöttük képletbe, hogy N^2 első n jegye az S számot alkossa, és utána még k valamilyen más számjegy következzen. Ahhoz, hogy (2)-t kielégítő N létezzen, elegendő, hogy a két szélen álló szám különbsége 1-nél nagyobb legyen:

$$\sqrt{(S+1) \cdot 10^k} - \sqrt{S \cdot 10^k} = (\sqrt{S+1} - \sqrt{S})\sqrt{10^k} > 1,$$

amiből $\sqrt{10^k} > \sqrt{S+1} + \sqrt{S}$ azaz

$$10^k > 2S + 1 + 2\sqrt{S^2 + S}. \tag{3}$$

Így ha k-t úgy választjuk, hogy (3) teljesüljön (amit megtehetünk), akkor (2) két szélén álló szám különbsége 1-nél nagyobb, tehát N-et is meg tudjuk választani úgy, hogy (2) és ezzel együtt (1) is igaz legyen. Ezzel pedig épp a feladat állítását igazoltuk.