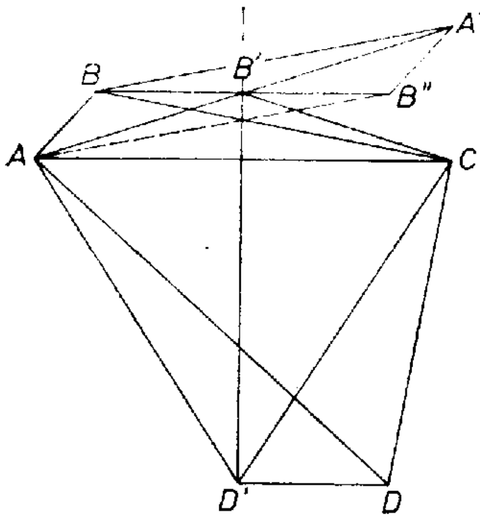
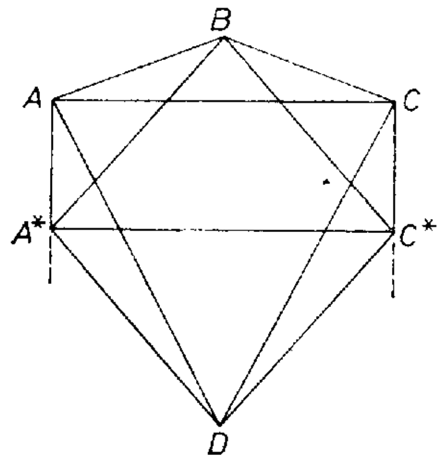
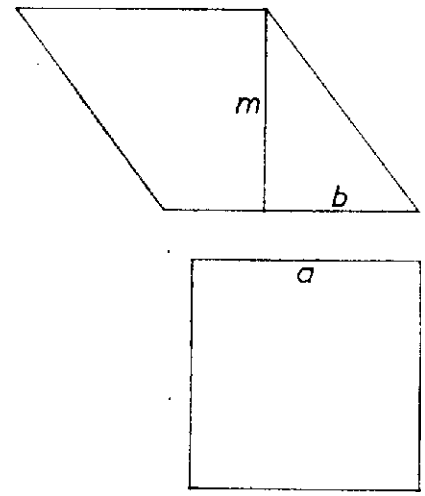
Tekintsünk egy tetszőleges $ABCD$ négyszöget, és húzzuk meg az egyik átlóját, legyen ez az AC.

Ismeretes, hogy ha a B és D csúcsokat ezen átlóval párhuzamos egyenes mentén eltoljuk, a négyszög területe nem változik. Legyen B, D új helyzete B', D'.







Először azt látjuk be, hogy az $AB'CD'$ négyszög kerülete akkor a legkisebb, ha B', D' az AC átló felező merőlegesén van, azaz a négyszög deltoid.

Tükrözzük az A és B pontokat a B' pontra, képük rendre A'' és B'', ekkor

$$AB + BC = AB + BA'' > 2AB' = AB' + B'C.$$

Másodszor belátjuk, hogy az egyenlő területű deltoidok közül a rombusz kerülete a legkisebb. A bizonyítást az előzőhöz hasonlóan végezhetjük, arra a két csúcsra, amely nem a szimmetriatengelyen fekszik. Ezeket eltolva, úgy hogy a felezőmerőlegesre kerüljenek, a kerület ismét csökkenni fog.

Végül tekintsünk két egyenlő területű rombuszt és négyzetet. A négyzet oldala legyen a, a rombusz oldala b, magassága m. Ekkor $t = bm = a^2$.

Kerületük $4a$, ill. $4b$. Mivel $b \geq m$, $b^2 \geq a^2$, és a és b pozitív, így $4b \geq 4a$, egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $b = m$.

Válaszunk tehát: az egyenlő területű négyszögek közül a négyzet kerülete a legkisebb.