a) Az (1) kifejezésben 5 darab hármas szerepel, jelöljük a különböző zárójelezések számát z_5-tel; általában ha i darab hármas szerepel, akkor a különböző zárójelzések számát z_i-vel. Tudjuk, hogy

$$z_2 = 1, \quad z_3 = 2, \tag{2}$$

és feladatunk z_5 meghatározása. A zárójelezés azt jelenti, hogy az (1) kifejezésben kijelölünk egy alapot és egy kitevőt, majd az alapot és a kitevőt külön-külön zárójelezzük. Az alap tartalmazhat 1, 2, 3 vagy 4 darab hármast, ekkor a kitevőben rendre 4, 3, 2, illetve 1 hármas lesz. A zárójelezések számát az egyes esetekben úgy kapjuk meg, hogy az összetartozó alap-kitevő párok lehetséges zárójelezéseinek számát összeszorozzuk, majd a szorzatokat összeadjuk:

$$z_5 = 1 \cdot z_4 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_2 + z_4 \cdot 1. \tag{3}$$

Ennek alapján előbb z_4-et kell meghatároznunk. Négy darab hármas esetén könnyebb dolgunk van, ugyanis az „alap” most csak 1, 2 vagy 3 darab hármast tartalmazhat, így a zárójelezések száma:

$$z_4 = 1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_2 + z_3 \cdot 1. \tag{4}$$

Ennek értéke (2) szerint 5, így (3) alapján z_5 értéke 14, azaz az (1) kifejezést 14-féleképpen zárójelezhetjük.

b) Felírva a 14 lehetséges zárójelezést, az $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$ összefüggés alkalmazásával mindegyiket 3^{3^x} alakra hozhatjuk, és x előforduló értékei 4, 5, 6, 10, 27, 28, 81, 3^9, valamint 3^{27}. Így a 14-féle zárójelezés legfeljebb 9 különböző értéket szolgáltat, de ennyit kapunk is, hiszen az itt felsorolt 9 szám mind különböző. (Ezt például beláthatjuk úgy, hogy felhasználjuk, hogy azonos, egynél nagyobb alapú hatványok csak akkor egyenlők, ha a kitevők egyenlők.)

Megjegyzés. A megoldás *a)* felében használt gondolatmenettel azt kapjuk, hogy

$$z_n = 1 \cdot z_{n-1} + z_2 \cdot z_{n-2} + \ldots + z_{n-2} \cdot z_2 + z_{n-1} \cdot 1,$$

amiből egy kis számolás után azt kapjuk, hogy

$$z_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$