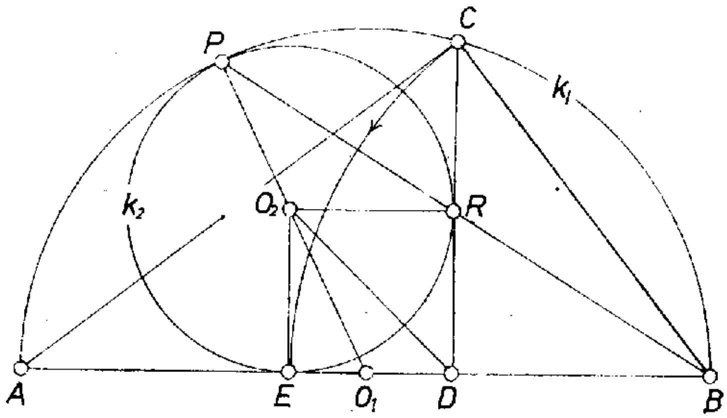
I. megoldás. Jelöljük az AB szakasz fölé írt kört k_1-gyel, középpontját O_1-gyel, a beírt kör középpontját O_2-vel, k_1 és k_2 közös pontját P-vel, k_2 és CD közös pontját R-rel.



Mivel $PO_2R_\triangle \sim PO_1B_\triangle$ és P, O_2, O_1 egy egyenesen (a centrálison) van, ezért P, R, B pontok is egy egyenesen vannak.

B-ből a k_2 körhöz húzott, érintő szakaszra az ismert mértani középarányos tételt felírva kapjuk, hogy

$$BE = \sqrt{BP \cdot BR}.$$

A BCD háromszög és BAC háromszög hasonlóságából

$$\frac{BC}{BD} = \frac{AB}{BC}, \qquad \text{ahonnan} \qquad BC = \sqrt{AB \cdot BD}.$$

Azt kell tehát igazolnunk, hogy

$$\sqrt{BP \cdot BR} = \sqrt{AB \cdot BD}, \qquad \text{illetve}$$

a távolságok pozitív volta miatt elegendő

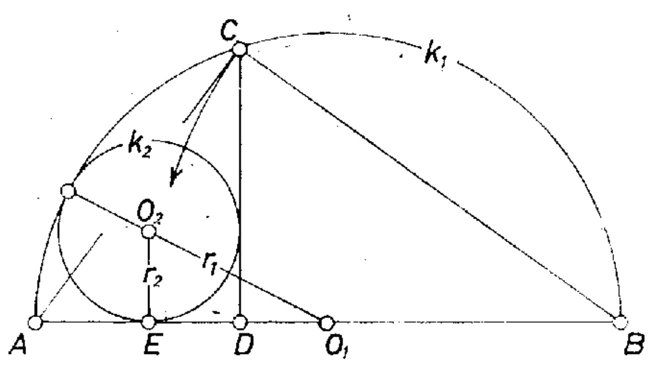
$$BP \cdot BR = AB \cdot BD \tag{1}$$

egyenlőség helyességét belátni, ami a BDR és BPA háromszögek hasonlóságából rögtön adódik.

Nincs értelme beszélni a feladatról, ha a C pont egybeesik A-val vagy B-vel.

G. Horváth Ákos (Budapest, II. Rákóczi F. Gimn.)

II. megoldás. Az AB átmérőjű k_1 kör sugara legyen r_1, a k_2 érintő kör sugara r_2 és $BD = d$. Ekkor $AB = 2r_1$, $O_2E = r_2$, $O_2D = \sqrt{2}r_2$, $BE = d + r_2$.



Az ABC derékszögű háromszögből

$$BC = \sqrt{AB \cdot DB} = \sqrt{2r_1 d}.$$

Azt kell tehát igazolnunk, hogy

$$d + r_2 = \sqrt{2r_1 d},$$

illetőleg a távolságok pozitív volta miatt

$$(d + r_2)^2 = 2r_1 d. \tag{1}$$

Az O_1O_2E háromszögből

$$\overline{O_1O_2^2} = \overline{EO_2^2} + \overline{EO_1^2} = \overline{EO_2^2} + (\overline{EB} - \overline{O_1B})^2,$$

azaz

$$(r_1 - r_2)^2 = r_2^2 + (d + r_2 - r_1)^2.$$

A műveleteket elvégezve valóban (1)-et kapjuk.