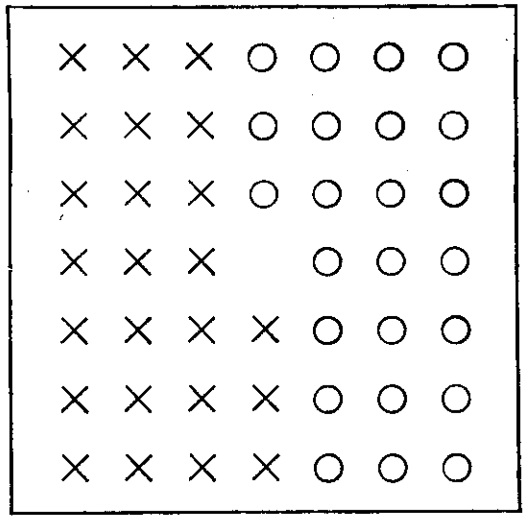


Megoldás. I. Azt mondjuk, hogy a figurák valamely sorban vagy oszlopban „jól helyezkednek el”, ha a sor vagy oszlop középső mezője üres, és az üres mező egyik oldalán csupa fekete, másik oldalán csupa fehér figura áll. A kiindulási ábrán a középső oszlopban és a középső sorban helyezkednek el jól a figurák.

Be fogjuk látni, hogy *ha valamely oszlopban vagy sorban a figurák jól helyezkednek el, akkor ebben az oszlopban, ill. sorban a fekete és a fehér figurák $n(n+2)$ lépésben felcserélhetők a többi oszlopban, ill. sorban álló figura mozgatása nélkül.*

Fogadjuk el egyelőre ezt az állítást bizonyítás nélkül. Ebből következik, hogy a kiindulási ábrán a középső oszlop fekete és fehér figurái a többi oszlop figuráinak mozgatása nélkül $n(n+2)$ lépésben felcserélhetők. Hajtsuk végre ezt a cserét. Nyilvánvaló, hogy a csere során a középső oszlop minden mezője legalább egyszer üresen marad: a középső mező rögtön kezdetben üres, a többi mezőre pedig ellentétes színű figurának kell kerülnie – ehhez pedig előbb ki kell üríteni a mezőt. Vegyük észre, hogy amikor a k-adik mezőt először ürítjük ki, a tábla k-adik sorában a figurák jól fognak elhelyezkedni! Következésképp a k-adik sor figurái most $n(n+2)$ lépésben felcserélhetők, a többi sor figuráinak elmozdítása nélkül (vagyis a középső oszlop többi mezőjén a figurák helyzete eközben nem változik). Ha a k-adik sorban a cserét végrehajtjuk, akkor a csere végén a k-adik sor középső mezője megint üres lesz, tehát a középső oszlopban a figurák megint úgy fognak elhelyezkedni, mint a csere előtt. A középső oszlopban tehát ott folytathatjuk eljárásunkat, ahol abbahagytuk.

Ha a középső oszlopban úgy hajtjuk végre a cserét, hogy amikor valamelyik mező először válik üressé, akkor az eljárást megszakítjuk, és a megfelelő sor cseréjét közbeiktatjuk, akkor eljárásunk végére az 1., 2., …, n. oszlop fekete figuráit felcseréljük az $n+2$., $n+3$., …, $2n+1$. oszlop fehér figuráival és a középső oszlopban felcseréljük egymással a fekete és a fehér figurákat. Tehát a teljes cserét végrehajtottuk.

Nézzük, hány lépésből áll az eljárásunk! A középső oszlopban a cseréhez $n(n+2)$ lépés kell. A sorokon belüli cserét mindig akkor kezdjük végrehajtani, amikor épp ebben a sorban helyezkednek el jól a figurák, így egy sor cseréjéhez is elég $n(n+2)$ lépés. Összesen $2n+1$ sorban és egy oszlopban kell tehát egyenként $n(n+2)$ lépést tennünk, vagyis eljárásunk összesen $(2n+2)\,n\,(n+2) = 2n(n+1)(n+2)$ lépésből áll. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a sakktábla fekete és fehér figurái felcserélhetők egymással, és ehhez a cseréhez elég $2n(n+1)\cdot(n+2)$ lépés.

II. Most már csak az egy sorra vagy oszlopra vonatkozó állítást kell igazolnunk. Nyilván elég sorokra belátnunk az állítást, hiszen ebből 90°-os elforgatással már adódik az oszlopokra is. Tegyük fel, hogy valamely sorban a figurák jól helyezkednek el. A sor kívánt átrendezését 3 részben hajtjuk végre, ez a 3 rész kissé más, ha n páratlan, és más, ha n páros. Tekintsük tehát az alábbi 6 helyzetet:

A: Az 1., 2., …, n. mezőn fekete, az $(n+2)$., $(n+3)$., …, $(2n+1)$. mezőn fehér figura áll, az $(n+1)$-edik mező üres;

B: a páros mezőkön fekete, a páratlan mezőkön az első kivételével fehér figura áll, az első mező üres;

B': a páros mezőkön fehér, a páratlan mezőkön a $(2n+1)$-edik kivételével fekete figura áll, a $(2n+1)$-edik mező üres;

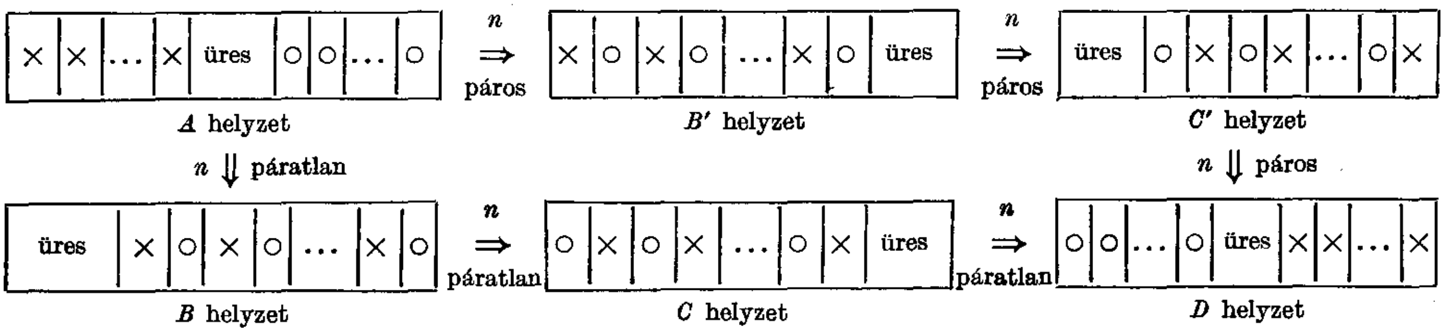
C: a páros mezőkön fekete, a páratlan mezőkön a $(2n+1)$-edik kivételével fehér figura áll, a $(2n+1)$-edik mező üres;

C': a páros mezőkön fehér, a páratlan mezőkön az első kivételével fekete figura áll, az első mező üres;

D: az 1., 2., …, n. mezőn fehér, az $(n+2)$., $(n+3)$., …, $(2n+1)$-edik mezőn fekete figura áll, az $(n+1)$-edik mező üres.

Azt kell belátnunk, hogy az A helyzetből a D helyzetbe el lehet jutni $n(n+2)$ lépésben. Ehhez a következőt fogjuk belátni: ha n páratlan, akkor A-ból B-be és C-ből D-be $n(n+1)/2$ lépésben el lehet jutni, másrészt B-ből C-be n lépés elég. Ez összesen $2\cdot n(n+1)/2 + n = n(n+2)$ lépés. Páros n-re azt fogjuk belátni, hogy A-ból B'-be és C'-ből

D-be $n(n+1)/2$ lépésben el lehet jutni, másrészt B'-ből C'-be n lépés is elég. Páros n esetén tehát A-ból B' és C'-n keresztül lehet $n(n+2)$ lépésben D-be jutni.



Nézzük először, hogyan lehet n lépésben B-ből C-be jutni! Ez egyszerű: az első lépésben a 3. mezőn álló figurával az 1. mezőre ugrunk, ezzel üresen marad a 3. mező, általában a k-adik lépésben a $(2k+1)$-edik mezőn álló figurával az üres $(2k-1)$-edik mezőre ugrunk és ezzel a $(2k+1)$-edik mező felszabadul.

B'-ből C'-be hasonlóan lehet eljutni n lépésben, csak most a páratlan mezőn álló figurákkal egyet-egyet jobbra kell ugrani és nem balra.

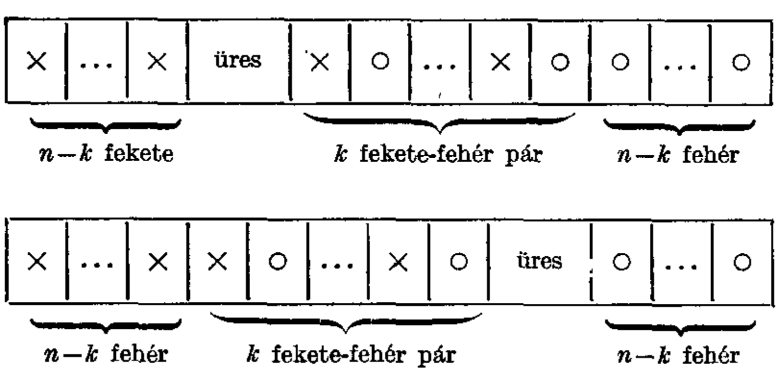
Nyilvánvaló a következő is: C-ből pontosan annyi lépésben lehet D-be jutni, mint D-ből C-be (általában az egyik helyzetből a másikba ugyanannyi lépésben lehet eljutni, mint onnan vissza az elsőbe, csak a lépések sorrendjét kell megfordítani és minden lépést a fordítottjával kell helyettesíteni). Ha a D és C helyzetet a középső mezőre tükrözzük, éppen az A és B helyzetet kapjuk. Következésképp A-ból B-be ugyanannyi lépésben lehet eljutni, mint D-ből C-be vagy C-ből D-be. Ugyanígy lehet belátni, hogy A-ból B'-be ugyanannyi lépés elég, mint C'-ből D-be. Bizonyításunk befejezéséhez elég tehát azt megmutatnunk, hogy ha n páratlan, akkor A-ból B-be, ha pedig n páros, akkor A-ból B'-be $n(n+1)/2$ lépésben el lehet jutni. Erre egy eljárást fogunk megadni, az eljárás n „szakaszból", azon belül a k-adik „szakasz" k lépésből fog állni:

1. szakasz: az n-edik mezőn álló (fekete) figurát egy mezővel jobbra toljuk;

2. szakasz: az $(n+2)$-edik mezőn álló (fehér) figurával balra ugrunk (az n-edik mezőbe), majd az $(n+3)$-adik mezőn álló (fehér) figurát egy mezővel balra toljuk;

3. szakasz: most már két fekete figurával tudunk jobbra ugrani (előbb az $(n+1)$-edik mezőről az $(n+3)$-adikra, majd az $(n-1)$-edik mezőről az $(n+1)$-edikre), ezután az $(n-2)$-edik mezőn álló fekete figurát eggyel jobbra toljuk stb.

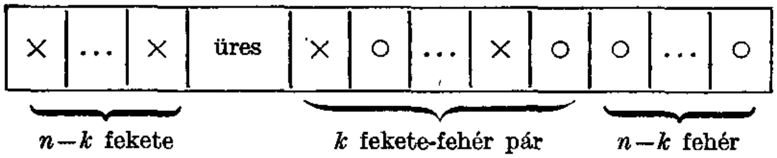
A k-adik szakasz után a sor (az üres mezőt figyelmen kívül hagyva) 3 „tömbből" áll: az első „tömb" $n-k$ darab fekete figurából, a második „tömb" k figurapárból áll, a pár első figurája mindig fekete, a második mindig fehér. A harmadik „tömb" $n-k$ fehér figurából áll. Ha k páratlan, akkor az üres mező az 1. és a 2. tömb között van a k. szakasz után; ha k páros, akkor az üres mező a 2. és a 3. tömb között van a k. szakasz után.



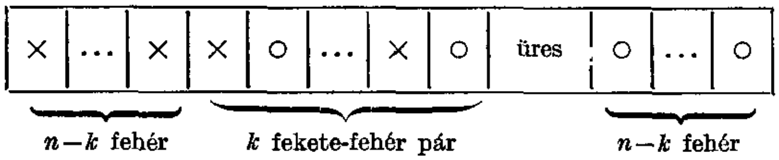
ha k páratlan, (1)

ha k páros. (2)

Az első esetben (k páratlan) ugorjunk a 2. tömb fehér bábuival egyet-egyet balra! Ezt megtehetjük, ha a tömb legbalra álló figurájával kezdjük. Így az üres mező végül az $(n+k+1)$-edik mezőre kerül. Toljuk most át erre a mezőre a 3. tömb bal szélén álló figurát. Ez a $k+1$ lépés alkotja a $(k+1)$-edik szakaszt. A $(k+1)$-edik szakasz után tehát így alakul a helyzet:



ha k páratlan, (1)



ha k páros. (2)

Ez valóban (2) alakú.

A második esetben (ha k páros, $k+1$ páratlan), a 2. tömb fekete bábuival ugrunk egyet-egyet jobbra, (ezt a tömb legjobbra álló fekete figurájával kell kezdeni), majd az 1. tömb jobb szélső figuráját toljuk az így megüresedő $(n-k+1)$-edik helyre. Ez a $k+1$ lépés alkotja a $(k+1)$-edik szakaszt, eredményeként egy (1) alakú sort kapunk.

Végül az n-edik szakasz végrehajtása után az 1. és a 3. tömb kiürül. Ha n páratlan, akkor az üres mező az n fekete-fehér pár előtt áll, ami éppen a B helyzet. Ha n páros, akkor az üres mező az n fekete-fehér pár után fog állni, ami a B' helyzet. A k-adik szakaszban pontosan k lépést ($k-1$ ugrást és egy tolást) hajtottunk végre, és eljárásunk n szakaszból állt, így eljárásunkhoz $1+2+\ldots n = n(n+1)/2$ lépésre volt szükség. Ezzel bebizonyítottuk, amit akartunk.

(S. L.)

Megjegyzés. Megadtunk egy algoritmust, amivel a fekete és fehér figurákat $2n(n+1)(n+2)$ lépésben felcserélhetjük. Megmutatjuk, hogy a helycsere elvégzéséhez $2n(n+1)^2$ lépésre mindenképpen szükség van, ennél kevesebbel semmilyen eljárással sem jutunk célhoz.

Tekintsük ehhez azt a fekete figurát, amelyik az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében áll. A cserék végrehajtása után egy fehér figura helyére, mondjuk az $f(i,j)$-edik sor és a $g(i,j)$-edik oszlop kereszteződésébe került. Mivel a figurák csak vízszintesen és függőlegesen tudnak mozogni, s egy lépésben legfeljebb 2 mezővel kerülnek odább, azért a kiszemelt figurával legalább

$$\frac{\left|f(i,j)-i\right|}{2} + \frac{\left|g(i,j)-j\right|}{2}$$

lépést kellett tennünk. Az összes fekete figurával tehát együttvéve legalább

$$(*) \qquad \frac{1}{2}\sum_{(i,j)}\Big(\left|f(i,j)-i\right| + \left|g(i,j)-j\right|\Big) \geq$$
$$\geq \frac{1}{2}\Bigg|\sum_{(i,j)} f(i,j) - \sum_{(i,j)} i\Bigg| + \frac{1}{2}\Bigg|\sum_{(i,j)} g(i,j) - \sum_{(i,j)} j\Bigg|$$

lépést kellett tennünk. Itt a $\sum$ jel alatt álló (i,j) pár a fekete figurák kezdeti helyein fut végig, $\big(f(i,j), g(i,j)\big)$ pedig a helycsere végén elfoglalt helyüket mutatja, vagyis az $\big(f(i,j), g(i,j)\big)$ pár éppen a fehér figurák kezdeti helyein fut végig. Ezért a $\sum\limits_{(i,j)} i$ összegben az 1 és $(n+1)$ közötti egészek n-szer, az $(n+2)$ és $(2n+1)$ közöttiek $(n+1)$-szer fordulnak elő, míg a $\sum\limits_{(i,j)} f(i,j)$ összegben az 1 és n közötti egészek $(n+1)$-szer, az $(n+1)$ és $(2n+1)$ közöttiek pedig n-szer találhatók meg. A $(*)$ egyenlőtlenség jobb oldalán az első tag kétszerese tehát

$$\big[(n+2)+\ldots+(2n+1)\big] - [1+2+\ldots+n] = n(n+1).$$

Hasonlóan kapjuk, hogy a második tag kétszerese

$$(2n+1)\big[(n+2)+\ldots+(2n+1)-(1+2+\ldots+n)\big] = (2n+1)n(n+1).$$

Így a fekete figurákkal tett lépések száma legalább

$$\frac{1}{2}\big[n(n+1)+(2n+1)n(n+1)\big] = n(n+1)^2.$$

A fehér figurákkal is legalább ennyit kell lépnünk, ami éppen az állított $2n(n+1)^2$ lépést jelenti.