Jelöljük az n szám hetes számrendszerbeli alakját (a számjegysorozatot) α_n-nel, ennek a számjegysorozatnak a k alapú számrendszerbeli értékét $\alpha\overset{k}{\underset{n}{\smile}}$-val. Hasonlóan a nyolcas, illetve kilences számrendszerre β_n, γ_n, illetve $\beta\overset{k}{\underset{n}{\smile}}$, $\gamma\overset{k}{\underset{n}{\smile}}$, jelöléseket vezetjük be. Világos, hogy

$$n=\alpha\overset{7}{\underset{n}{\smile}}=\beta\overset{8}{\underset{n}{\smile}}=\gamma\overset{9}{\underset{n}{\smile}},$$

továbbá azokat az n számokat kell meghatároznunk, amelyekre

$$24\,875<\alpha\overset{10}{\underset{n}{\smile}}+\beta\overset{10}{\underset{n}{\smile}}+\gamma\overset{10}{\underset{n}{\smile}}<25\,125. \tag{1}$$

Vegyük észre, hogy ha n értékét növeljük, akkor a $\alpha\overset{7}{\underset{n}{\smile}}$, $\beta\overset{8}{\underset{n}{\smile}}$, $\gamma\overset{9}{\underset{n}{\smile}}$, is nő, ám ezzel együtt a $\alpha\overset{10}{\underset{n}{\smile}}$, $\beta\overset{10}{\underset{n}{\smile}}$ és $\gamma\overset{10}{\underset{n}{\smile}}$ is. Így az (1)-nek egymás utáni egész számok tesznek eleget, azaz elég megkeresni azt a legkisebb n-et, amire az $\alpha\overset{10}{\underset{n}{\smile}}+\beta\overset{10}{\underset{n}{\smile}}+\gamma\overset{10}{\underset{n}{\smile}}$ összeg már nagyobb 24 875-nél, és a legnagyobb olyat, amire az összeg még kisebb 25 125-nél.

Megmutatjuk, hogy β_n nem lehet ötjegyű. Tegyük fel, hogy $\beta\overset{10}{\underset{n}{\smile}}\geqq 10\,000$, azaz $n=\beta\overset{8}{\underset{n}{\smile}}\geqq 10\,000\overset{8}{\smile}=4096$. Ekkor $\alpha\overset{7}{\underset{n}{\smile}}\geqq 4096=14\,641\overset{7}{\smile}$ és $\gamma\overset{9}{\underset{n}{\smile}}\geqq 4096=5551\overset{9}{\smile}$, vagyis $\alpha\overset{10}{\underset{n}{\smile}}+\beta\overset{10}{\underset{n}{\smile}}+\gamma\overset{10}{\underset{n}{\smile}}\geqq 14\,641+10\,000+5551=30\,192$. Így β_n legfeljebb négyjegyű, azaz $\beta\overset{10}{\underset{n}{\smile}}\leqq 7777$. Sőt β első jegye nem lehet hetes sem. Ugyanis az előzőekhez hasonlóan $3584=13\,310\overset{7}{\smile}=7000\overset{8}{\smile}=4822\overset{9}{\smile}$ alapján ebben az esetben

$$\alpha\overset{10}{\underset{n}{\smile}}+\beta\overset{10}{\underset{n}{\smile}}+\gamma\overset{10}{\underset{n}{\smile}}\geqq 13\,310+7000+4822=25\,132$$

volna, ami még mindig több 25 125-nél. Ám az $n=3583$ érték már megfelelő:

$$\alpha\overset{10}{\underset{3583}{\smile}}+\beta\overset{10}{\underset{3583}{\smile}}+\gamma\overset{10}{\underset{3583}{\smile}}=13\,306+6777+4821=24\,904.$$

Ezzel a keresett számok közül a legnagyobbat, 3583-at megkaptuk. Ha most 3583-at legfeljebb 6-tal csökkentjük, $\alpha\overset{10}{\underset{n}{\smile}}$ és $\beta\overset{10}{\underset{n}{\smile}}$ is legfeljebb 6-tal, $\gamma\overset{10}{\underset{n}{\smile}}$ legfeljebb 7-tel csökken, így az összegük még mindig több lesz 24 875-nél. Viszont $n=3583-7=3576$-ra már az $\alpha\overset{10}{\underset{n}{\smile}}$ is több, mint 40-nel kevesebb $\alpha\overset{10}{\underset{3583}{\smile}}$-nál, tehát a feladatot kielégítő számok között a legkisebb 3577.

Összefoglalva, a kiindulási szám 3577, 3578, 3579, 3580, 3581, 3582 vagy 3583 valamelyike lehetett.