A kérdéses kifejezést írjuk át az

$$x^2 + (y + a)x + (y^2 + by + c) \tag{1}$$

alakba. Ez a kifejezés pontosan akkor lesz minden $(x,\ y)$ számpárra pozitív, ha y tetszőleges rögzített értéke mellett (1) minden x számra pozitív. Mivel (1)-ben az x^2-es tag együtthatója pozitív, ez pontosan akkor következik be, ha (1) diszkriminánsa, azaz $(y + a)^2 - 4(y^2 + by + c)$ negatív, azaz ha

$$3y^2 + y(4b - 2a) + (4c - a^2) > 0. \tag{2}$$

Így (1) pontosan akkor pozitív minden $(x,\ y)$ számpárra, ha (2) teljesül minden y számra. Ez utóbbi viszont akkor teljesül, ha (2) diszkriminánsa negatív, azaz

$$a^2 - ab + b^2 < 3c, \tag{3}$$

amivel a keresett feltételt megadtuk.

Nagy Attila (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. A kifejezés négyszeresét megfelelő módon átalakítva a következő alakhoz jutunk:

$$(2x + y + a)^2 + 3\left(y + \frac{2b - a}{3}\right)^2 + \left(4c - a^2 - \frac{(2b - a)^2}{3}\right).$$

Könnyen látható, hogy ez pontosan akkor lesz minden $(x,\ y)$-ra pozitív, ha a harmadik tagja pozitív, amiből ismét a (3) feltételt kapjuk.

Megjegyzés. Eredményünk azt jelenti, hogy az $x^2 + xy + y^2 + ax + by$ függvény minimuma $(ab - a^2 - b^2)/3$.