Mivel a színezéshez pontosan három színt használtunk, van két azonos színű csúcs. Ha ez két átellenes csúcs, ekkor ez a két pont eleget tesz a kívánt feltételnek, hiszen távolságuk $\sqrt{2} > \sqrt{65/64}$.

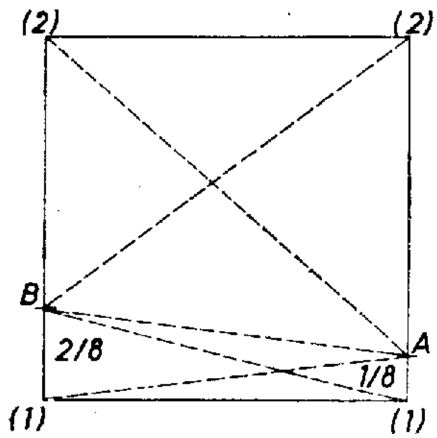
Jelöljük a színeket 1-essel, 2-essel, 3-assal, és vizsgáljuk azt az esetet, ha két szomszédos csúcs azonos színű (pl. 1-es).

Ekkor két esetet különböztetünk meg:

a) a másik két csúcs azonos színű, pl. 2-es,

b) a másik két csúcs nem azonos színű.

a) Mérjünk fel az 1, 2 oldal egyikére 1-től 1/8-adot, jelöljük ezt a pontot A-val.

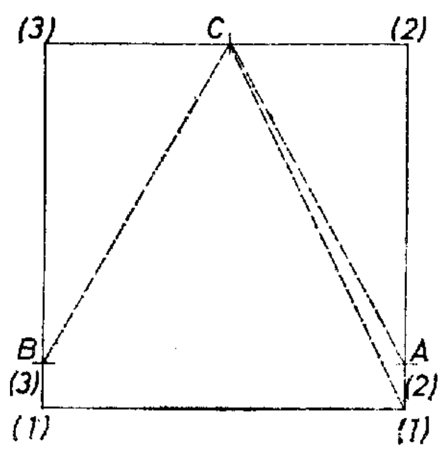


Ha A 1-es színű, akkor van olyan 1-es színű csúcs, amelytől mért távolsága $\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{65}{64}}$. Ha A 2-es színű, akkor van olyan 2-es színű csúcs, amelyiktől mért távolsága $\sqrt{1^2+\left(\frac{7}{8}\right)^2} > \sqrt{\frac{65}{64}}$.

Maradt az az eset, ha A 3-as színű. Ekkor az A-val szemközti élre mérjünk 2/8-adot 1-től kiindulva, jelöljük ezt a pontot B-vel.

B bármelyik színnel is van kiszínezve, mindig található hozzá a feltételt kielégítő szín, mert az egyik 1-es színű csúcstól való távolsága $\sqrt{\left(\frac{2}{8}\right)^2+1^2} > \sqrt{\frac{65}{64}}$, az egyik 2-es színű csúcstól $\sqrt{1^2+\left(\frac{6}{8}\right)^2} > \sqrt{\frac{65}{64}}$, és 3-tól pontosan $\sqrt{65/64}$ távolságra van.

b) Ha a másik két csúcs különböző színű, mérjünk fel ismét 1/8-adot az 1, 2 és 1, 3 oldalakra 1-ből kiindulva. Jelöljük ezeket a pontokat A-val és B-vel.

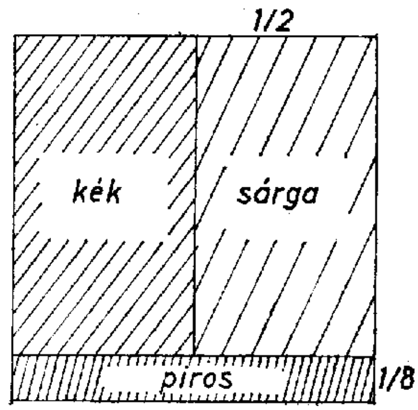


A csak akkor nem tesz eleget a feltételnek, ha 2-es, B pedig akkor, ha 3-as színű. Ezután vegyük a 2, 3 oldal felezőpontját, C-t. C akármilyen színűre is van festve, a 3 szín közül, mindig kielégíti a feltételt. Ui. 1-től való távolsága $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2} > \sqrt{\frac{65}{64}}$, 2-től való távolsága $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{64}+\frac{49}{64}} = \sqrt{\frac{65}{64}}$, és 3-tól való távolsága ugyancsak $\sqrt{65/64}$

Megjegyzés. A megoldás során tulajdonképpen azt bizonyítottuk be, hogy a négyzet kerületét nem lehet három színnel kiszínezni úgy, hogy az azonos színű pontpárok távolsága $\sqrt{65/64}$-nél kisebb legyen. A szemlélet is azt sugallja, hogy a kerületen kell keresnünk az egymástól távol eső azonos színű pontokat. Felvetődik tehát a kérdés, hogy nem lehetne valamivel többet is állítani a színezésről: igaz-e az, hogy a négyzet belsejében is található $\sqrt{65/64}$-nél nem kisebb távolságra eső azonos színű pontpár.

A másik, ennél természetesebbnek tűnő kérdés, nem lehet esetleg a $\sqrt{65/64}$-et még növelni; esetleg van olyan $N > \sqrt{65/64}$ szám, hogy a négyzet pontjait három színnel kiszínezve található azonos színű pontpár, amelynek távolsága legalább N.

Mindkét kérdésre tagadó a válasz: nem lehet élesíteni a feladat állítását.



A harmadik ábrán látható színezés – (két terület határán levő pontokat valamelyik, a pont által határolt terület színére kell színezni, hogy melyikre, az mindegy) –, ugyanis olyan, hogy nincs a négyzet belsejében olyan azonos színű pontpár, amelynek távolsága elérné a $\sqrt{65/64}$-et, és az is igaz, hogy a legtávolabb eső azonos színű pontok távolsága pontosan $\sqrt{65/64}$. (Gondoljunk arra, hogy mindegyik kis téglalap átlója éppen $\sqrt{65/64}$ hosszú!)