Megmutatjuk, hogy nem véletlen összefüggésekről van szó; a két feltétel bármelyikéből következik a másik. Ennek érdekében azt fogjuk bizonyítani, hogy a két feltétel mindegyike ekvivalens az

$$m = \frac{a+c}{2} \tag{3}$$

feltétellel.

Jelöljük a trapéz hosszabbik párhuzamos oldalát a-val. Mivel a trapéz szimmetrikus, Pitagorasz tételéből adódik, hogy

$$\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = b^2 - m^2, \tag{4}$$

továbbá igaz a következő azonosság:

$$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = \frac{a^2+c^2}{2}. \tag{5}$$

Helyettesítsük be (4)-ből az $\left(\frac{a-c}{2}\right)^2$-et, kapjuk, hogy

$$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + b^2 - m^2 = \frac{a^2+c^2}{2}.$$

Rendezzük az egyenletet a következőképpen:

$$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - m^2 = \left(\frac{a^2+c^2}{2}\right) - b^2. \tag{6}$$

(6) jobb oldala a (2) feltétel miatt 0. Ez pontosan akkor teljesül, ha a bal oldalon is 0 van. Figyelembe véve a távolságok hosszának pozitív voltát, kapjuk az

$$m = \frac{a+c}{2}$$

összefüggést, azaz (2) valóban egyenértékű (3)-mal.

Most belátjuk, hogy (1) is egyenértékű (3)-mal. Induljunk ki ismét (4)-ből és a következő azonosságból

$$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = ac. \tag{7}$$

(4)-ből (7)-be helyettesítve és (1)-et felhasználva kapjuk, hogy

$$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - b^2 + m^2 = ac$$

azaz

$$\left(\frac{a+c}{2} - m\right)^2 = 0,$$

ami valóban ekvivalens (3)-mal.

Megjegyzés. Felhasználhattuk volna a bizonyítás során azt az észrevételt is, hogy az így kapott trapéz átlói merőlegesek egymásra. A megoldásban szereplő (3) feltétel azt jelenti, hogy a szóban forgó trapézok egy négyzetből származtathatók úgy, hogy annak két párhuzamos oldalát egyenlő, de ellentétes irányú szöggel elforgatjuk a felezőpontjuk körül.

Orosz István (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., II. o. t.)