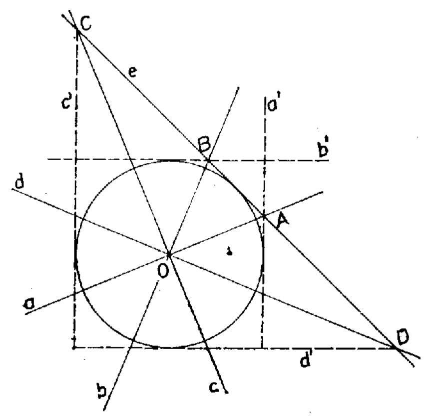
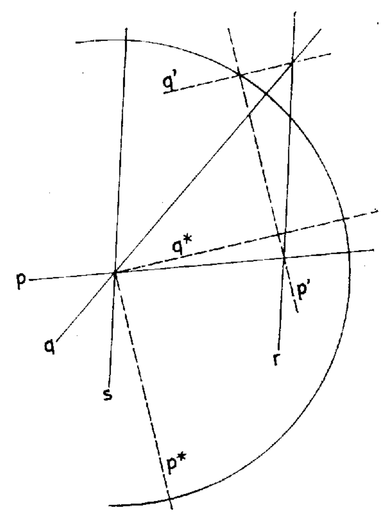
A feladat szövege nem zárja ki azt, hogy b és d azonosak legyenek, legyük fel azonban először, hogy ez nincs így. Ekkor b merőleges d-re és az a, b; b, c; c, d; d, a párok közti szögek mind 45°-osak. Megrajzolva a mondott második érintőket, azt tapasztaljuk, hogy azok egy négyzetet határoznak meg.



Ennek igazolása érdekében megmutatjuk, hogy ha a p, q egyenesek 45°-os szöget zárnak be, és r tetszőleges egyenes, amelynek p-re vonatkozó tükörképe p', q-ra vonatkozó tükörképe pedig q', akkor p' merőleges q'-re.

Jelöljük p és q metszéspontját M-mel, az M-en át r-rel párhuzamosan húzott egyenest s-sel, s-nek p-re, q-ra vonatkozó tükörképét p^*-gal, illetve q^*-gal.



Mivel párhuzamos egyeneseknek tetszőleges egyenesre vonatkozó tükörképe párhuzamos, p' párhuzamos p^*-gal, és q' q^*-gal. Elég tehát belátnunk, hogy p^* merőleges q^*-ra. Ha s-t M körül elforgatjuk pozitív irányban α szöggel, p^* is, q^* is negatív irányban fordul el M körül α szöggel, tehát a p^*, q^* közti szög közben változatlan marad. Forgassuk el s-t addig, míg p-vel azonos nem lesz, ekkor p^* is azonos p-vel, q^* pedig p-nek q-ra vonatkozó tükörképe lesz, ami valóban merőleges p-re.

Rátérünk feladatunk állításának az igazolására. Jelöljük a mondott érintőt e-vel, e-nek az a, b, c, d egyenesekkel alkotott metszéspontját A-val, B-vel, C-vel, D-vel, az ezekből húzott második érintőt rendre a'-vel, b'-vel, c'-vel, d'-vel. Mivel az A-ból a körhöz húzott két érintő szimmetrikus OA-ra, a' az e-nek a-ra vonatkozó tükörképe. Hasonlóan a b', c', d', érintők e-nek a b, c, d egyenesekre vonatkozó tükörképei. Mivel az a, b, c, d egyenesek között rendre 45°-os szög van, a' merőleges b'-re, b' c'-re, c' d'-re és d' a'-re. Emiatt a' párhuzamos c'-vel, de nem lehet vele azonos, mert e-t különböző pontokban metszik. Hasonlóan b' és d' párhuzamosak és különbözőek. Mivel ezek az egyenesek érintik a kört, valóban négyzetet határoznak meg.

Ha b és d mégis azonosak volnának, akkor b' és d' is azonosak, tehát a négyzetnek csak három oldalát kapjuk meg, de az egyik oldalát kétszer. Ebben az esetben az a', b', c', d' egyenesek nem határoznak meg négyszöget a szokásos értelemben.

Lelovics Ferenc (Miskolc, Földes F. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. A feladattal kapcsolatban számos versenyző küldött be dolgozatot, melyeknek jelentős százalékát nem lehetett *megoldásként* értékelni. Ennek fő oka, hogy sok kezdő pontverseny-résztvevő úgy gondolta, hogy a „Mit mondhatunk a négyszögről?” kérdésre elegendő egy mondattal válaszolni, egy ábra alapján: „Ez a négyszög négyzet.” Nyilvánvaló, hogy egy matematikai versenyfeladat megoldásának egzakt bizonyítást vagy igazolt helyességű eljárást kell tartalmaznia! Szintén jelentős volt azoknak a száma, akik a feladatot geometriai szerkesztési problémának tekintették, és egy véletlenszerű e egyenes felvételével megszerkesztették az ábrát. Ennek során részletesen leírták azokat a szerkesztési lépéseket, amelyek tömör és általános formában a feladat kitűzésében szerepeltek! Ezután fölösleges diszkusszió következett – amelynek eredményeként megállapították, hogy a szerkesztés nem végezhető el akkor, amikor e nem metszi valamelyik egyenest – vagyis amit eleve kizárt a kitűzés.