Ha csak az első, $a_1,\ a_2,\ \dots$ sorozatot vizsgáljuk, két eset lehetséges: vagy van olyan A szám, amelynél a sorozat minden tagja kisebb, vagy nincs. Az első esetben a sorozatban csak véges sok különböző szám fordul elő, van tehát közöttük olyan, amelyik végtelen sokszor szerepel. Legyen m ilyen szám, és legyen $i_1 < i_2 < \ldots < i_n < \ldots$ a sorozat m-mel egyenlő tagjainak az indexe. Ha a sorozatból csak ezeket az elemeket vesszük ki, csupa egyenlő számot kapunk:

$$a_{i1} = a_{i2} = \ldots = a_{in} = \ldots$$

A másik esetben legyen $i_1 = 1$, és legyen i_2 a sorozat első a_1-nél nem kisebb tagjának indexe. Mivel most tetszőleges A számhoz található a sorozatban legalább A-val egyenlő elem, van ilyen i_2. Továbbmenve minden $n > 2$ számhoz lépésről lépésre határozzuk meg az i_n indexet úgy, hogy i_n legyen a sorozat első $a_{i_{n-1}}$-nél nem kisebb tagjának az indexe. Feltevésünk szerint minden n-hez találunk ilyen i_n-t. Ha a sorozatból csak az így kapott indexekhez tartozó elemeket vesszük ki, azokra

$$a_{i1} \leq a_{i2} \leq \ldots = a_{in} \leq \ldots$$

teljesül.

A két esetet összefoglalva elmondhatjuk, hogy minden természetes számokból álló sorozatnak van olyan részsorozata, amelyben egyik tag sem kisebb az előtte állónál, azaz a részsorozat *monoton növő*. (Ha egy sorozatban minden tag nagyobb az előtte állónál, akkor *szigorúan monoton növő*nek nevezik.)

Tekintsük az $a_1,\ a_2,\ \dots$ sorozatnak az előbbiek szerint létező monoton növő részsorozatát:

$$a_{i1} \leq a_{i2} \leq \ldots = a_{in} \leq \ldots \tag{3}$$

Tekintsük most a $b_{i1},\ b_{i2}\ \dots,\ b_{in},\ \dots$ sorozatot. Ha erre alkalmazzuk az $a_1,\ a_2,\ \dots$ sorozatra bizonyított állításunkat (alkalmazhatjuk, hiszen ez is természetes számokból álló végtelen sorozat), olyan $j_1 < j_2 < \ldots$ indexeket is találhatunk, amelyekre

$$b_{j1} \leq b_{j2} \leq \ldots \leq b_{jn} \leq \ldots \tag{4}$$

másrészt (3) szerint

$$a_{j1} \leq a_{j2} \leq \ldots \leq a_{jn} \leq \ldots \tag{5}$$

hiszen a j indexek az i-k közül kerültek ki. Végül a bizonyított állítást a $c_{j1},\ c_{j2}, \ldots\ c_{jn},\ \dots$ sorozatra alkalmazva kapjuk, hogy vannak olyan $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$ indexek, amikre (4) és (5) szerint

$$\begin{aligned} a_{k1} &\leq a_{k2} \leq \ldots \leq a_{kn} \leq \ldots \\ b_{k1} &\leq b_{k2} \leq \ldots \leq b_{kn} \leq \ldots \\ c_{k1} &\leq c_{k2} \leq \ldots \leq c_{kn} \leq \ldots \end{aligned} \tag{6}$$

Így (2) például $p = k_2,\ q = k_1$ választással teljesül.

Megjegyzés. A megoldásból az is adódott, hogy végtelen sok $p,\ q$ párt is tudunk választani, valamint hogy a feladat állítása nemcsak három, hanem tetszőleges sok sorozatra is igaz. Viszont ha végtelen sok sorozatot engedünk meg, úgy már az állítás nem igaz. Legyenek ugyanis a sorozatok

$$\begin{array}{l} 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \dots \\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ \dots \\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \dots \\ \vdots \end{array}$$

Ekkor nincs olyan p és q természetes szám, hogy minden sorozatban a p-edik tag legalább akkora, mint a q-adik.