1. A feladat feltételeit természetesen úgy értelmezzük, hogy a négy sík közt nincs további (ki nem mondott) párhuzamossági kapcsolat; vagyis pl. L_1 metszi az L_3-at, így persze L_2 is metszi, másrészt L_1 és L_2 az L_4-et is metszik, hiszen ha két párhuzamos sík egyike átmetsz egy harmadik síkot, akkor azt a pár másik síkja is átmetszi. Ekkor a négy, páronkénti metszési egyenes párhuzamos egymással; jelöljük L_1 és L_3 közös egyenesét m-mel.

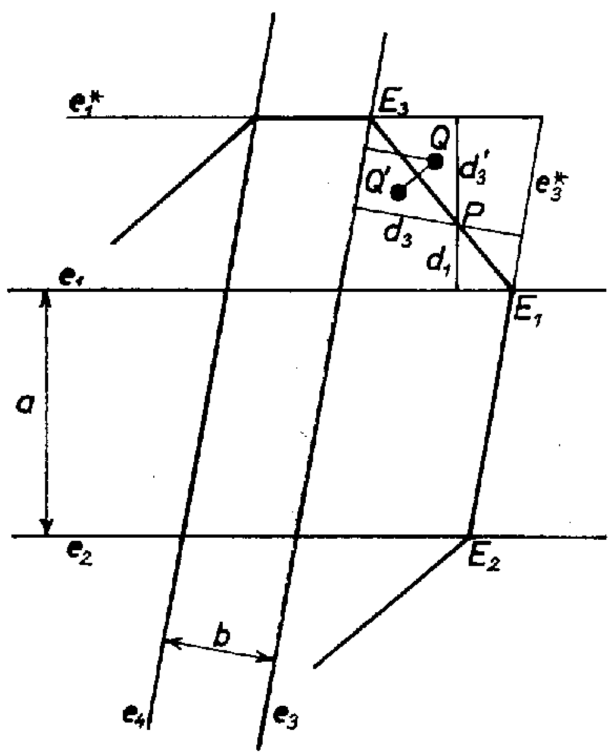
2. Feladatunkat visszavezetjük egy síkbeli feladatra, a következő észrevétel alapján. Ha egy P pont hozzátartozik a keresett H mértani helyhez (ponthalmazhoz), akkor a P-n átmenő, m-mel párhuzamos m_p egyenes minden pontja H-hoz tartozik. Valóban, m_p az m közvetítésével párhuzamos L_1-gyel és L_3-mal, és ekkor L_2-vel, illetve L_4-gyel is, így m_p minden egyes pontjának a négy síktól mért távolságai rendre ugyanakkorák, mint P megfelelő távolságai. Ennek alapján elég megkeresni H pontjait egy, a P-n átmenő, az m-mel nem párhuzamos síkban.

Ezt az S síkot mi az m-re merőlegesnek vesszük, így P-nek az L_i síktól mért távolsága ($i = 1, 2, 3, 4$) rendre egyenlő az S és L_i közös e_i egyenesétől mért d_i távolságával, hiszen S megválasztása alapján P-nek L_i-n és e_i-n levő vetülete azonos. És most S-ben azon pontok H_S mértani helyét fogjuk keresni, amelyekre nézve

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = c,$$

ahol c az eredetileg adott szám.

3. Tudjuk ehhez, hogy $e_1 \parallel e_2$ és $e_3 \parallel e_4$, tehát e négy egyenes egy paralelogrammát zár körül és az S-en 8 további részt hoz létre (közös belső pont nélküli részek, 1. ábra), 4 szögtartományt – amelyeket egy–egy félegyenes határol – és 4 fél síksávot, határaik két–két félegyenes és a paralelogramma egy–egy oldalszakasza.



1. ábra

Tovább redukálhatjuk feladatunkat: elég H_S pontjait megkeresni a paralelogrammában, a szögtartományok egyikében és a fél síksávok egyikében, hiszen problémánk nem változik meg sem az 1 és 2, sem a 3 és 4 indexek fölcserélésével, sem akkor, ha e két cserét egyszerre hajtjuk végre. Válasszuk azt a fél síksávot (I.), amelyben $d_3 < d_4$ és azt a szögtartományt, amelyben ezen felül még $d_1 < d_2$ teljesül (II.), másrészt jelöljük e_1 és e_2 távolságát a-val, e_3 és e_4 távolságát b-vel. (Az utóbbiak egyszersmind L_1 és L_2, illetve L_3 és L_4 távolságát is jelentik.)

4. A két–két párhuzamos közti pontokra $d_1+d_2 = a$, illetve $d_3+d_4 = b$ (beleértve az egyik–egyik párhuzamoson levő pontokat is), ezért a paralelogramma minden belső és kerületi pontjára, csúcsára a 4 távolság összege $a + b$. Eszerint $c = a + b$ esetén az egész paralelogramma a H_S-hez tartozik, $c \neq a + b$ esetén pedig egy pontja sem tartozik hozzá.

Az I. félsávban és a II. részben $d_4 = d_3 + b$, így $d_3 + d_4 = 2d_3 + b \geq b$, a II. tartományban ezen felül, hasonlóan $d_1 + d_2 = 2d_1 + a \geq a$, és egyenlőség csak az e_3-nak, illetve az e_1-nek a határvonalakon figyelembe vett pontjaira teljesül.

Ezek szerint $c = a + b$ esetén H_S-hez a félsávokból és a szögtartományokból nem tartozhat belső pont; $c < a + b$ esetén H_S üres ponthalmaz; $c > a + b$ esetén pedig H_S-hez csak a paralelogrammán kívüli pontok tartozhatnak, mégpedig az I.-ből és a II.-ből csak azok, amelyekre teljesül az I.-ben:

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = a + b + 2d_3 = c,$$

a II.-ben: $\quad = 2d_1 + a + 2d_3 + b = c,$

vagyis az I.-ben:

$$d_3 = \frac{1}{2}(c - a - b) = c',$$

a II.-ban:

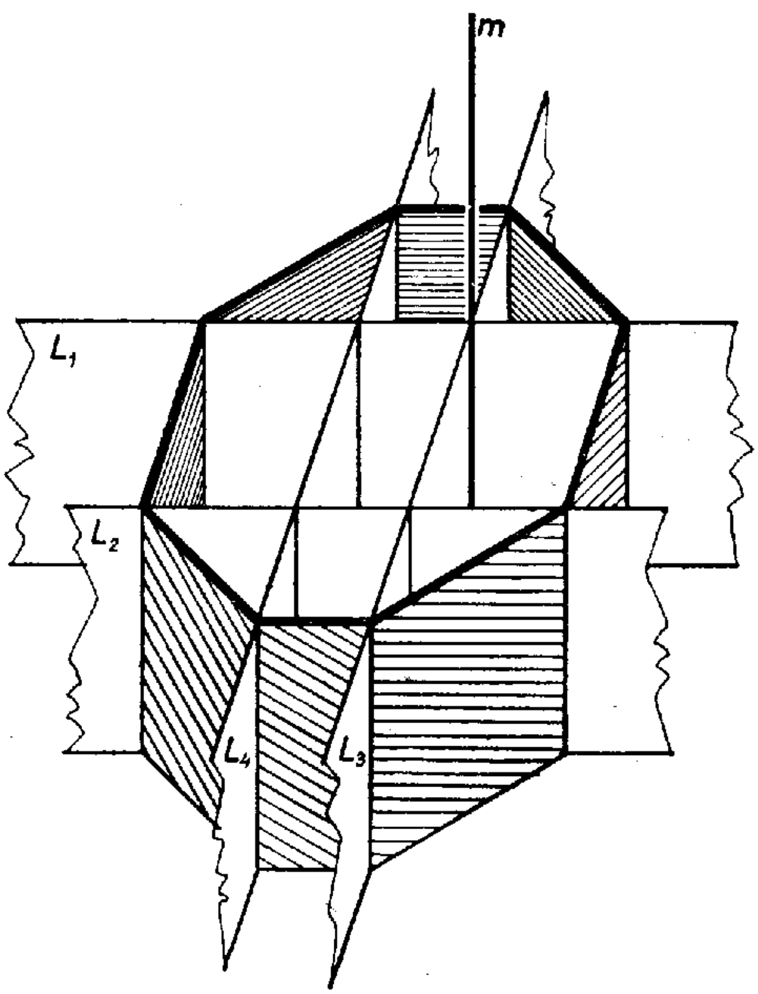
$$d_1 + d_3 = c'.$$

Az első követelmény csak abból az e_3^* egyenesből az I.-be eső E_1E_2 szakasznak a pontjaira teljesülhet, amely e_3-tól c' távolságban halad, és ezekre nyilvánvalóan teljesül is.

Legyen hasonlóan e_1^* az e_1-től c' távolságban (a II.-on át) haladó egyenes, továbbá legyen ennek e_3-on levő pontja E_3. Ekkor a második követelménynek a II. határvonalán megfelelnek E_1 és E_3, és a belsejében az E_1E_3 szakasz pontjai. Ugyanis e_1, e_3^*, e_1^* és e_3 egy rombusz oldalegyenesei, E_1E_3 ennek átlója, tehát szimmetriatengelye is, az E_1E_3-ra való tükrözés e_3-at e_1^*-ba viszi át, így az átlószakasz belső P pontjaira d_3 egyenlő P-nek e_1^*-tól mért távolságával, $d_1 + d_3 = c'$. Ha viszont egy Q pont nincs rajta a tengelyen, akkor e_3-tól és e_1^*-től mért távolságai nem egyenlők, tehát $d_1 + d_3 \neq c'$, ilyen pont nem tartozhat H_S-hez.

Ezek szerint $c > a + b$ esetén H_S a 8 síkrész egy–egy szakaszából áll össze (az egyenesek indexeinek fent említett cseréivel.) E szakaszok végpontjai, egyben páronkénti csatlakozási pontjai e_1-en és e_2-n az e_3-tól és az e_4-től c'-re levő pontok, e_3-on és e_4-en pedig az e_1-től és az e_2-től c'-re levő pontoknak.

A keresett H-t pedig $c > a + b$ esetén így kapjuk: E_1-en át vesszük az L_1 és L_3 közös m egyenesével párhuzamos egyenest és ezt körültoljuk H_S 8 szakaszán, míg újra áthalad E_1-en, a mozgó egyenes 8 síksávot ír le (2. ábra).



2. ábra

A $c = a + b$ esetben pedig H az a hasábos (végtelenbe nyúló) térrész, melyet a négy adott sík közrezár, beleértve ennek a határpontjait is.

Megjegyzés. Ha megengedjük, hogy L_1 és L_3 párhuzamosak lehessenek, akkor tisztáznunk kell a 4 (különböző) sík sorrendjét és ismernünk kell szomszédos páronkénti távolságaikat is. Ekkor c értéke szerint H vagy üres ponthalmaz, vagy a két közbülső sík közti térréteg, vagy pedig két sík, amelyek közül az egyik vagy mind a kettő azonos is lehet valamelyik szélső síkkal.