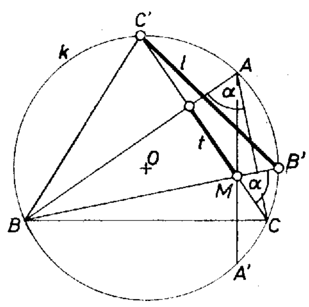
1. Ismeretes, hogy az $M$ magasságpontnak mindhárom oldalegyenesre való tükörképe rajta van a háromszög köré írt $k$ körön. Ezért $M$-nek $AC$-re való $M_b$ tükörképe azonos $B'$-vel, hiszen így $MM_b \perp AC \perp MB$, és $M$-en át csak egy merőleges van $AC$-re, másrészt $MB$ és $k$ közös pontjai $B$ és $B'$. Ugyanígy $C'$ az $M$-nek $AB$-re való tükörképe. Eszerint $B'A = MA = C'A$, vagyis $B'$, $C'$ és $M$ egy $A$ középpontú $k_1$ körön vannak rajta. E kör két húrja $C'B' = l$ és $C'M = 2t$.

2. Megmutatjuk, hogy az $AB'C'$ egyenlő szárú háromszög $A$-nál levő szöge $2 \cdot BAC\sphericalangle = 2\alpha$, illetve $2(180° - \alpha)$ aszerint, hogy $\alpha$ hegyesszög, illetve tompaszög. Ennek alapján $A$, majd $k_1$ az $l$-ből és $\alpha$-ból megszerkeszthető, és rajta $M$ kijelölhető lesz, továbbá $B'$, $C'$, $A$ meghatározza $k$-t, és ebből $MB'$ kimetszi $B$-t, $MC'$ pedig $C$-t.

Egy konkrét háromszögből kiindulva, $k_1$ révén a $B'AC'$ középponti szög kétszer akkora, mint vagy a $B'MC'$ kerületi szög, vagy ennek a kiegészítő szöge aszerint, hogy $M$ a $B'C'$ egyenesnek az $A$-t tartalmazó partján van, illetve a másik partján. Továbbmenve, a $B'MC'$ szög mindenképpen egyenlő a $BMC$ szöggel, mert ha $M$ kívül adódik $k$-n, akkor e két szög azonos, ha pedig $M$ a $k$-ban van, akkor egymás csúcsszögei, hiszen $M$ a $BB'$ és $CC'$ húrok közös pontja. $M$-nek $k$-hoz képest külső, illetve belső helyzete – mint ismeretes – azon múlik, hogy van-e tompaszög az $ABC$ háromszög szögei közt, vagy nincs. (Derékszögű háromszögben $M$ azonos a derékszög csúcsával.) Tekintsük külön-külön az eseteket.

Hegyesszögű háromszögben $B'MC'\sphericalangle = BMC\sphericalangle = BA'C\sphericalangle = 180° - BAC\sphericalangle = 180° - \alpha$, ahol $A'$ az $M$-nek $BC$-re való tükörképe (1. ábra).

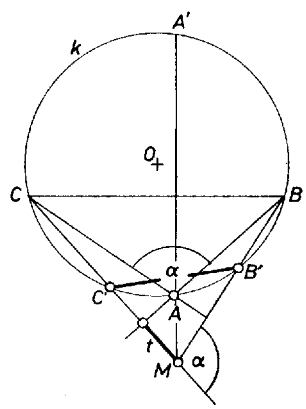



*1. ábra*

Másrészt $B'C'$ elválasztja $A$-t $M$-től, hiszen ekkor $B'$ a $B$-t nem tartalmazó $AC$ íven van, $C'$ a $C$-t nem tartalmazó $AB$ íven, vagyis a pontok sorrendje $C, B'$, $A, C'$, $B$, és $M$ a $CC'$ $BB'$ szakaszok közös pontja. Így a fentiek szerint

$$B'AC'\sphericalangle = 2(180° - B'MC'\sphericalangle) = 360° - 2BMC\sphericalangle = 2\alpha.$$

Tompaszögű háromszögben, ha $\alpha$ hegyesszög, választhatjuk úgy a betűzést, hogy $\beta > 90°$, hiszen a $B$ és $C$, illetve $B'$ és $C'$ pontok szerepe feladatunk szempontjából egyező (2. ábra).



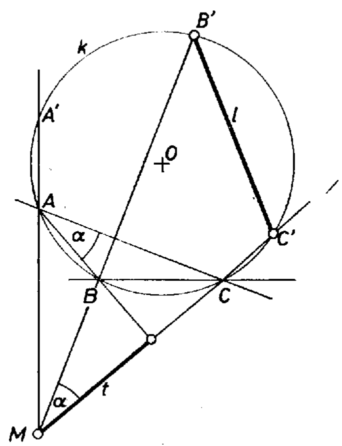

*2. ábra*

Ekkor $B'$ az $MCC'$ egyenesnek $B$-t tartalmazó partján van,

$$B'MC'\sphericalangle = 90° - MCA\sphericalangle = BAC\sphericalangle = \alpha,$$

tehát ekkor is $B'AC'\sphericalangle = 2\alpha$. – Ha viszont $\alpha > 90°$, akkor $M$ az $AA'$-nek $A$-n túli meghosszabbításán van, vagyis $B'C'$-nek $A$-t tartalmazó partján (3. ábra), így

$$B'AC'\sphericalangle = 2 \cdot B'MC'\sphericalangle = 2 \cdot BA'C\sphericalangle = 2(180° - BAC\sphericalangle) = 2(180° - \alpha).$$

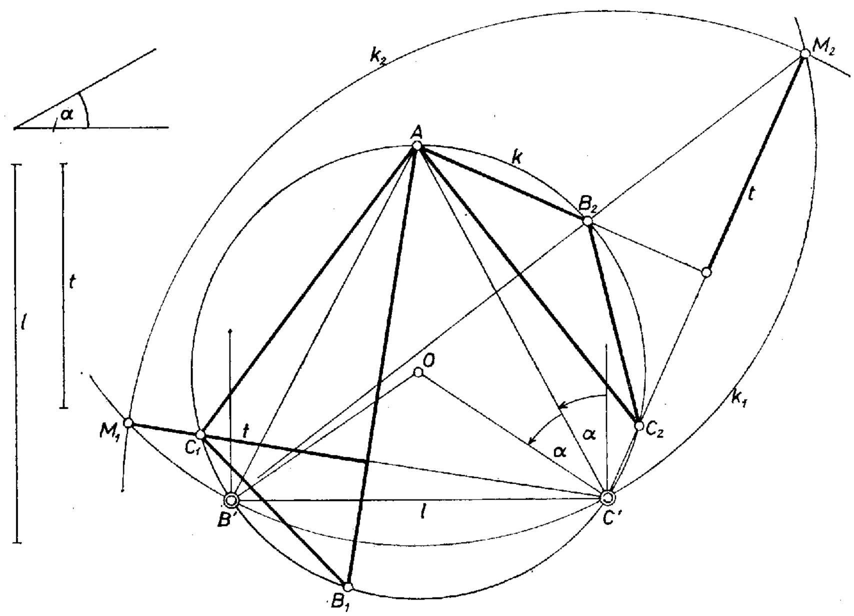



*3. ábra*

Ezzel állításunk bizonyítását befejeztük, a szerkesztés egy lehetséges végrehajtását pedig már fönt vázoltuk.

A végrehajtásból kiküszöbölhetjük az $\alpha$ hegyes- vagy tompaszög voltából adódó vagylagosságot. Fölvesszük a $B'C' = l$ szakasz helyzetét, és $C'$ körül $2t$ sugárral $k_2$ kört írunk. $B'C'$-re a végpontjaiban egyirányú merőleges félegyeneseket állítunk. Ezeket $B'$, illetve $C'$ körül egymás felé elfordítjuk $\alpha$-val, metszéspontjuk adja $A$-t, majd még egyszer $\alpha$-val, ezek metszéspontja $O$, a $k$ középpontja. Megrajzoljuk $k_1$-et, ez a $k_2$-t a magasságpont lehetséges $M_1$, $M_2$ helyzeteiben metszi, majd $k$-t, ez $M_iB'$-ből $B$-t, $M_iC'$-ből $C$-t metszi ki, ahol $i = 1,\ 2$. Amennyiben a $BAC$ szög $(180° - \alpha)$-nak adódik, az a megoldás nem felel meg.

A szerkesztés helyességének belátását az olvasóra hagyjuk.




Az előírt méretek között a megoldást biztosító nagyságviszonyokat pontosan egy egyszerű trigonometriai számítás adhatná meg. Külön megemlítjük az $\alpha = 90°$ esetet. Ebből adódik, hogy csak $l = 0$ és $t = 0$ lehet, különben az adatrendszer ellentmondó; ha viszont $l = t = 0$, akkor tetszőleges derékszögű háromszög megfelel, tehát ez az adatrendszer határozatlan. Külön-külön is szükséges, hogy $l \neq 0$ és $t \neq 0$. A fent leírt szerkesztésben az elsőként felhasznált $l$-re természetesen nincs korlátozás, $t$-re viszont felső korlátot szab, hogy nem lehet nagyobb $C'A$-nál.